



Mathematische
Abhandlungen

von

Dr. Oskar Schlömilch,
Professor der höheren Mathematik an der Königl. Sächs. technischen Bildungsanstalt zu Dresden.

Inhalt.

I. Ueber das Theorem von Mac Laurin. — II. Die Bürmann'sche Reihe. — III. Ueber approximative Quadraturen. — IV. Ueber ein Doppelintegral mit zwei willkührlichen Funktionen. — V. Ueber die Bestimmung der Masse bei ungleichförmiger Dichtigkeit.



Mit einer Figurentafel.

Dessau,
Verlag von Moritz Katz.
1850.

Seitdem es eine unter den Meistern der Wissenschaft anerkannte Thatsache ist, dass divergente Reihen keine Summen besitzen oder, was auf das Nämliche hinauskommt, dass eine divergente Reihe keiner bestimmten Grösse gleichgesetzt werden darf, hat sich die Aufmerksamkeit der Analytiker von Neuem der Entwickelungsformel von Mac Laurin zugewendet, um dieselbe in einem wesentlichen Punkte zu vervollständigen. Da nämlich ohne Weiteres klar ist, dass die Convergenz oder Divergenz der Reihe

$$f(o) + \frac{f'(o)}{1} x + \frac{f''(o)}{1.2} x^2 + \frac{f'''(o)}{1.2.3} x^3 + \cdots$$

lediglich von der Natur der Funktion $f(x)$ abhängt, so entsteht von selbst die Frage, auf welche Weise man unmittelbar aus dieser Funktion das Intervall, innerhalb dessen die obige Reihe convergirt, d. h. das Gültigkeitsintervall der Entwickelung entnehmen könnte. Eine Beantwortung dieser Frage ist allerdings schon seit längerer Zeit bekannt; giebt man nämlich der in Rede stehenden Reihe nur n Glieder und bestimmt den zugehörigen Rest, so ist bekanntlich

$$f(x) - \frac{x^n f^{(n)}(\vartheta x)}{1.2\ldots n} = f(o) + \frac{f'(o)}{1} x + \frac{f''(o)}{1.2} x^2 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{f^{(n-1)}(o)}{1.2\ldots(n-1)} x^{n-1}$$

worin ϑ einen positiven ächten Bruch bezeichnet, und es convergirt oder divergirt nun die Reihe, je nachdem der Rest

$$\frac{x^n f^{(n)}(\vartheta x)}{1.2\ldots n}$$

sich für unendlich wachsende n der Gränze Null nähert oder nicht.

Die Anwendung dieses Kriteriums ist aber meistentheils etwas beschwerlich, indem sie voraussetzt, das man den n^{ten} Differenzialquotienten von $f(x)$ in eine independente Formel entwickelt angeben könne, was bei einigermaassen zusammengesetzten Funktionen so umfangreiche Formeln erfordert, dass sich die Abnahme oder Nichtabnahme jenes Restes daraus nur schwer ersehen lässt. Hierzu kommt noch Eines. Bei der Wichtigkeit, welche die imaginären Zahlen, namentlich seit der Entdeckung ihres geometrischen Sinnes, erlangt haben, darf sich die Wissenschaft nicht mehr auf Entwickelungen im Bereiche der reellen Zahlen beschränken und es entspringt daraus von selbst die Forderung, die Gränzen für die Gültigkeit der Mac Laurin'schen Reihe in dem allgemeinen Falle zu bestimmen, wo man sich x unter der Form $r\ (cos t + \sqrt{-1}\ sin t) = re^{ti}$ enthalten denkt. — Aus diesen Bemerkungen geht hervor, dass dem vorigen, gewissermaassen *a posteriori* gewonnenen Kriterium für die Gültigkeit der Mac Laurin'schen Formel ein zweites mehr *a priori* abgeleitetes Kennzeichen an die Seite zu stellen wäre, dessen Gebrauch gleichförmig auf imaginäre und reelle Variable passte. Diesen Gedanken hat zuerst *Cauchy* auszuführen gesucht, ist aber dabei in einen nicht unbedeutenden Irrthum verfallen, in so fern er nämlich aus der Funktion $f(x)$ und ihren ersten Differenzialquotienten allein schon die Gültigkeitsgränzen der Mac Laurin'schen Reihe bestimmen zu können glaubte, was durchaus nicht möglich ist. Einerseits um diesen Fehler zu beseitigen, andererseits um der etwas sehr gekünstelten Betrachtung Cauchy's eine hoffentlich einfachere gegenüberzustellen, geben wir die nachstehenden Entwickelungen; dass hierbei die einfachsten Sätze der Integralrechnung benutzt worden sind, wird wohl keinen Anstoss erregen, denn obschon die Mac Laurin'sche Formel ihrer ursprünglichen Ableitung nach in die Differenzialrechnung gehört, so ist doch nicht

zu leugnen, dass die tiefere Untersuchung derselben, wie z. B. schon die genaue Bestimmung des Restes ohne Hülfe des unbestimmt bleibenden Bruches ϑ, die Hülfe der Integralrechnung nothwendig erfordert.

I.

Wir schicken zunächst einige Bemerkungen über die Diskontinuität der Funktionen voraus, einestheils um diesen im Ganzen nicht hinreichend beachteten Punkt genauer zu erörtern, anderntheils weil die spätere Untersuchung gerade in dieser Rücksicht eine scharfe Begriffsbestimmung erfordert. Eine Funktion $f(x)$ von nur einer Variabele x nennen wir diskontinuirlich an der Stelle $x = \xi$, wenn sich die Ausdrücke $f(\xi - \delta)$ und $f(\xi + \varepsilon)$, worin δ und ε wesentlich positive bis zur Null abnehmende Grössen bezeichnen, zwei verschiedenen Gränzen nähern, sobald man δ und ε in Null übergehen lässt, wobei noch ausdrücklich bemerkt werden möge, dass wir δ und ε als verschiedene Grössen ansehen. Die geometrische Abkunft dieser Definition ist leicht zu erkennen; wenn nämlich eine Curve bei P abbricht und nachher bei Q ihren Lauf wieder fortsetzt, so kann man P und Q durch eine Gerade verbinden, senkrecht darauf eine zweite Gerade als Abscissenachse errichten und sich die Gleichung der Curve auf dieses neue rechtwinklige Coordinatensystem bezogen denken; ist nun $y = f(x)$ diese Gleichung, so gehören zur Abscisse $OM = \xi$ zwei Ordinaten MP und MQ, von denen die erste die bisherige Reihe von Ordinaten beschliesst und die zweite eine neue Reihe von Ordinaten anfängt, während jeder anderen Abscisse immer nur eine einzige Ordinate entspricht. Für $LM = \delta$, $MN = \varepsilon$ ist nun $LU = f(\xi - \delta)$, $NV = f(\xi + \varepsilon)$ und wenn δ und ε in Null übergehen

$$MP = Lim\ f(\xi - \delta),\quad MQ = Lim\ f(\xi + \varepsilon)$$

woraus hervorgeht, dass die beiden Gränzwerthe von einander verschieden sind.

In ähnlicher Weise nennen wir eine Funktion $f(r, t)$ zweier Variabeln r und t diskontinuirlich für $r = \varrho$ und $t = \tau$, wenn diese speziellen Werthe von r und t so beschaffen sind, dass sich entweder die Ausdrücke

$$f(\varrho - \delta, \tau) \text{ und } f(\varrho + \varepsilon, \tau)$$

oder die folgenden

$$f(\varrho, \tau - \delta') \text{ und } f(\varrho, \tau + \varepsilon')$$

für unendlich abnehmende δ, ε, δ', ε' verschiedenen Gränzen nähern, und wenn man sich erinnert, dass eine Funktion zweier Veränderlichen geometrisch eine Fläche bedeutet, so wird man leicht die geometrische Bedeutung erkennen. So ist z. B. die Funktion

$$f(r, t) = \frac{1}{1 + r^2 \cos 2t}$$

diskontinuirlich an der Stelle $r = 1$ und $t = \frac{1}{2}\pi$; denn man hat

$$f(1 - \delta, \tfrac{1}{2}\pi) = \frac{1}{1 - (1 - \delta)^2} = \frac{1}{2\delta - \delta^2}$$

$$f(1 + \varepsilon, \tfrac{1}{2}\pi) = \frac{1}{1 - (1 + \varepsilon)^2} = -\frac{1}{2\varepsilon + \varepsilon^2}$$

und hiervon sind die Gränzwerthe bezüglich $+\infty$ und $-\infty$ also verschieden. Ebenso hätte man

$$f(1, \tfrac{1}{2}\pi - \delta') = \frac{1}{1 - \cos 2\delta'} = \frac{1}{2 \sin^2 \delta'}$$

$$f(1, \tfrac{1}{2}\pi + \varepsilon') = \frac{1}{1 - \cos 2\varepsilon'} = \frac{1}{2 \sin^2 \varepsilon'}$$

und hiervon sind die Gränzwerthe ebenfalls verschieden, weil ε' und δ' beliebige auf verschiedene Weise abnehmende Grössen bezeichnen; für $\varepsilon' = 2\delta'$ wäre z. B.

$$f(1, \tfrac{1}{2}\pi - \delta') - f(1, \tfrac{1}{2}\pi + \varepsilon')$$

$$= \frac{1}{2 \sin^2 \delta'} - \frac{1}{8 \cos^2 \delta' \sin^2 \delta'} = \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4 \cos^2 \delta'}\right) \frac{1}{\sin^2 \delta'}$$

und diese Differenz convergirt nicht gegen die Null, wie es der

Fall sein müsste, wenn sich der Minuendus und der Subtrahendus linker Hand gleichen Gränzen näherten.

Von dem wesentlichsten Einflusse ist die Diskontinuität einer Funktion da, wo es sich um die Werthangabe eines bestimmten Integrales

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

handelt, dessen Integrationsgränzen so beschaffen sind, dass die Funktion innerhalb des Intervalles a bis b eine Unterbrechung der Kontinuität erleidet. Hier kommt es zunächst darauf an, sich zu verständigen, was überhaupt unter einem bestimmten Integrale verstanden werden soll, und diese Erörterung ist um so nöthiger, als es zwei Definitionen des bestimmten Integrales giebt, deren Identität oder Verschiedenheit sich nicht unmittelbar beurtheilen lässt. Die eine Erklärung sagt: wenn bei unbestimmter Integration

$$\int f(x)\, dx = F(x) + Const$$

ist, so versteht man unter dem bestimmten, zwischen den Gränzen a und b genommenen, Integrale die Differenz $F(b) - F(a)$, also

$$1)\qquad \int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

dagegen erklärt eine zweite Definition das vorstehende Integral als die Gränze, welcher sich der Ausdruck

$$2)\quad \delta_1\, f(a) + \delta_2\, f(a+\delta_1) + \delta_3\, f(a+\delta_1+\delta_2) + \cdots$$
$$\cdots + \delta_n\, f(a + \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_{n-1})$$

nähert, sobald man die Grössen δ_1, δ_2, ... δ_{n-1}, welche der Bedingung

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \cdots + \delta_n = b - a$$

genügen müssen, bis zu jedem beliebigen Grade der Kleinheit herabsinken lässt. Die geometrische Bedeutung hiervon ist, dass man das in Rede stehende bestimmte Integral als die Fläche ansieht,

2

welche von der Strecke $b - a$ der Abscissenachse, von den Ordinaten $f(a)$ und $f(b)$ endlich noch von der durch die Gleichung $y = f(x)$ charakterisirten Curve begränzt wird; für $OA = a$, $OB = b$ ist z. B. in Fig. 1

$$\int_a^b f(x)\, dx = \text{Fläche } ABDQPCA$$

und die in Nr. 2. verzeichnete Summe bildet einen Näherungswerth dafür, indem man sich die Fläche in n Streifen zerlegt denkt, welche als Rechtecke mit den Grundlinien δ_1, δ_2, ... δ_n und den Höhen $f(a)$, $f(a + \delta_1)$, $f(a + \delta_1 + \delta_2)$, ... $f(a + \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_{n-1})$ gelten können. — Welche von diesen beiden Definitionen des bestimmten Integrales man als die primäre wählen will, ist an sich gleichgültig, wenn man nur fest an der Bezeichnungsweise hält und sich über das Verhältniss orientirt, in welchem die zweite Definition zur ersten steht; wir werden nach dem Vorgange von *Lejeune Dirichlet* und *Jacobi* die zweite Definition zu Grunde legen, weil sie einestheils die Klarheit der geometrischen Bedeutung für sich hat, anderntheils weil sie auf diskontinuirliche Funktionen eben so gleichförmig als auf stetige Funktionen passt, wie man aus der Figur unmittelbar ersieht. Wir haben daher noch die Stellung der ersten, nunmehr secundären, Definition gegen die unsrige zu erörtern, also die Frage zu beantworten, unter welchen Umständen ein bestimmtes Integral als die Differenz zweier Spezialwerthe eines unbestimmten Integrales angesehen werden darf.

Sind die Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ durch die Gleichung

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C \tag{3}$$

mit einander verbunden, so ist vermöge der Definition des unbestimmten Integrales

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

und zufolge der Bedeutung des Differenzialquotienten

$$Lim\,\frac{F(x+\delta)-F(x)}{\delta}=f(x)$$

worin sich das Zeichen *Lim* auf die unendliche Abnahme von δ bezieht. Geben wir dem δ einen individuellen endlichen Werth, so ist der Quotient $[F(x+\delta)-F(x)]:\delta$ dem Differenzialquotienten $f(x)$ nicht gleich, sondern um eine gewisse nicht näher zu untersuchende Grösse ζ davon verschieden, so dass wir

$$\frac{F(x+\delta)-F(x)}{\delta}=f(x)+\zeta$$

oder umgekehrt

$$\textbf{4)}\qquad \delta\,f(x)+\delta\zeta=F(x+\delta)-F(x)$$

setzen dürfen; von der Grösse ζ kennen wir zwar den genauen Betrag nicht, aber wir wissen wenigstens so viel von ihr, dass sie mit δ gleichzeitig gegen die Gränze Null convergirt, und Diess reicht für unsere Zwecke aus. Setzen wir nun in der Gleichung 4. der Reihe nach

$$\begin{aligned}x&=a,\ a+\delta_1,\ a+\delta_1+\delta_2,\ \ldots\ a+\delta_1+\ldots+\delta_{n-1}\\ \delta&=\delta_1,\quad \delta_2\quad,\quad \delta_3\quad,\ \ldots\quad \delta_n\end{aligned}$$

und bezeichnen die verschiedenen Werthe von ζ, welche jenen Substitutionen entsprechen, mit $\zeta_1,\ \zeta_2,\ \ldots\ \zeta_n$, so finden die Gleichungen statt:

$$\begin{aligned}
&\delta_1\,f(a)+\delta_1\zeta_1=F(a+\delta_1)-F(a)\\
&\delta_2\,f(a+\delta_1)+\delta_2\zeta_2=F(a+\delta_1+\delta_2)-F(a+\delta_1)\\
&\delta_3\,f(a+\delta_1)+\delta_3\zeta_3=F(a+\delta_1+\delta_2+\delta_3)-F(a+\delta_1+\delta_2)\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\delta_n f(a+\delta_1+\ldots+\delta_{n-1})+\delta_n\zeta_n=F(a+\delta_1+\ldots+\delta_n)-F(a+\delta_1+\ldots+\delta_{n-1})
\end{aligned}$$

Nehmen wir an, dass die Funktion $f(x)$ innerhalb des Intervalles $x=a$ bis $x=a+\delta_1+\ldots+\delta_n$ keine Unterbrechung der Kontinuität erleide (eine Supposition, deren Nothwendigkeit sich gleich nachher zeigen wird), so giebt die Addition der obigen Gleichungen

$$\delta_1 f(a) + \delta_2 f(a + \delta_1) + \delta_3 f(a + \delta_1 + \delta_2) + \ldots$$
$$\ldots + \delta_n f(a + \delta_1 + \ldots + \delta_{n-1})$$
$$+ \delta_1 \zeta_1 + \delta_2 \zeta_2 + \delta_3 \zeta_3 + \cdots + \delta_n \zeta_n$$
$$= F(a + \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n) - F(a)$$

und wenn wir $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ so wählen, dass ihre Summe $= b - a$ ist, so folgt

$$5) \quad \delta_1 f(a) + \delta_2 f(a + \delta_1) + \delta_3 f(a + \delta_1 + \delta_2) + \ldots$$
$$\ldots + \delta_n f(a + \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_{n-1})$$
$$= F(b) - F(a) - [\delta_1 \zeta_1 + \delta_2 \zeta_2 + \ldots + \delta_n \zeta_n]$$

Die Grössen $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ können hier verschiedene Zeichen haben, gleichwohl kann man den Betrag von $\delta_1 \zeta_1 + \delta_2 \zeta_2 + \ldots + \delta_n \zeta_n$ leicht in zwei Gränzen einschliessen; ist nämlich ζ' diejenige unter den Grössen ζ, welche den grössten absoluten Werth hat und ζ'' die absolut kleinste, so ist, wenn einmal ζ' und das andere Mal ζ'' für die verschiedenen ζ gesetzt wird und alle Glieder positiv genommen werden

$$\delta_1 \zeta_1 + \delta_2 \zeta_2 + \ldots + \delta_n \zeta_n < (\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n) \zeta'$$

und zugleich

$$\delta_1 \zeta_1 + \delta_2 \zeta_2 + \ldots + \delta_n \zeta_n > (\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n) \zeta''$$

und da $\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n = b - a$, so liegt demnach die Produktensumme

$$\delta_1 \zeta_1 + \delta_2 \zeta_2 + \delta_3 \zeta_3 + \ldots + \delta_n \zeta_n$$

zwischen den beiden Grössen

$$(b - a) \zeta' \text{ und } (b - a) \zeta''$$

Was nun von jedem ζ gilt, muss natürlich auch von ζ' und ζ'' gelten, und wenn daher sämmtliche δ unendlich abnehmen, so nähern sich auch ζ' und ζ'' folglich ebenso $(b - a) \zeta'$ und $(b - a) \zeta''$ der gemeinschaftlichen Gränze Null; dasselbe findet auch bei der zwischenliegenden Produktensumme statt und es ist daher für gleichzeitig abnehmende $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$

$$Lim\, [\delta_1 \zeta_1 + \delta_2 \zeta_2 + \ldots + \delta_n \zeta_n] = o.$$

Benutzen wir dieses Resultat für die Gleichung 5., indem wir auch dort sämmtliche δ gegen die Null convergiren lassen, so ist

$$Lim\,[\delta_1 f(a) + \delta_2 f(a + \delta_1) + \ldots + \delta_n\, f(a + \delta_1 + \ldots + \delta_{n-1})] = F(b) - F(a)$$

d. h. vermöge unserer Definition des bestimmten Integrales

$$6)\qquad \int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

so dass also in dem Falle, wo $f(x)$ kontinuirlich ist von $x = a$ bis $x = b$, in der That jedes bestimmte Integral durch die Differenz zweier Spezialwerthe eines unbestimmten Integrales ausgedrückt werden kann.

Wesentlich anders wird die Sache, wenn $f(x)$ innerhalb des Intervalles a bis b eine Unterbrechung der Kontinuität erleidet. Diese zieht nämlich, wie sehr leicht zu sehen ist, eine Diskontinuität von $F(x)$ nach sich, welche an derselben Stelle wie bei $f(x)$ eintritt, so dass also $F(\xi)$ ebenso wie $f(\xi)$ zwei verschiedene Werthe hat, welche wir durch die Bezeichnung $F(\xi - o)$ und $F(\xi + o)$ unterscheiden wollen. Nun wurde aber vorhin angenommen, dass sich bei der Addition des aufgestellten Gleichungensystemes $F(a + \delta_1)$ gegen $- F(a + \delta_1)$, $F(a + \delta_1 + \delta_2)$ gegen $- F(a + \delta_1 + \delta_2)$ etc. hebe oder dass überhaupt $F(x) - F(x) = o$ sei; diess ist allerdings richtig, sobald $F(x)$ nur einen Werth besitzt, falsch dagegen, wenn der Minuendus einen anderen Werth hat als der Subtrahendus. Dieser Fall tritt hier ein; denn vermöge der Substitutionen $x = a$, $a + \delta_1$, $a + \delta_1 + \delta_2$, ... etc. durchläuft, x das Intervall a bis b und zwar stetig, weil sämmtliche δ nachher unter jeden Grad der Kleinheit herab vermindert werden; so kommt denn unter den Werthen von x auch der Spezialwerth $x = \xi$ vor (wegen $b > \xi > a$) und folglich erscheint bei der Addition jener Gleichungen auch die Differenz $F(\xi - o) - F(\xi + o)$, welche nicht verschwindet; so gelangt man nicht zu der Gleichung 6., sondern zur folgenden

$$7) \quad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) + F(\xi - o) - F(\xi + o)$$

Es lässt sich dieses Resultat auch auf folgendem Wege ableiten. Vermöge der von uns adoptirten Definition des bestimmten Integrales ist, wie man leicht bemerkt,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\xi f(x)\,dx + \int_\xi^b f(x)\,dx$$

was geometrisch bedeutet, dass die Fläche *ABDQPCA* aus den beiden Flächen *AMPCA* und *MBDQM* besteht. Schreiben wir statt dessen

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{\xi - o} f(x)\,dx + \int_{\xi + o}^b f(x)\,dx)$$

womit weiter nichts gesagt ist, als dass bei der Bestimmung von *AMPCA* die Ordinate *MP* als letzte begränzende Ordinate und dass *MQ* als Anfangsordinate für die folgende Fläche *MBDQM* gelten soll, so ist jetzt die Funktion $f(x)$ einerseits kontinuirlich innerhalb der Gränzen a und $\xi - o$, ebenso ferner stetig zwischen den Gränzen $\xi + o$ und b. Durch Anwendung des Theoremes 6. wird jetzt

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(\xi - o) - F(a)] + [F(b) - F(\xi + o)]$$

was mit der Gleichung 7. identisch ist, wir schreiben dafür in schärferer Bezeichnung

$$8) \quad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) + Lim\,[F(\xi - \delta) - F(\xi + \varepsilon)]$$

wobei sich das Zeichen *Lim* auf die gleichzeitige unendliche Abnahme von δ und ε bezieht.

Vielleicht ist ein Beispiel hierzu nicht überflüssig. Aus der Formel

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

würde man ohne weitere Rücksicht finden

$$\int_0^\pi \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan \pi - \tan o = o$$

was völlig absurd ist, wenn man sich erinnert, dass die Curve der Gleichung $y = \sec^2 x$ die in Fig. 2. verzeichnete Gestalt besitzt ($OM - \frac{1}{2}\pi = MB$, $OC = BD = 1$) und dass folglich die über der Abscisse $OB = \pi$ stehende Fläche nicht nur nicht Null, sondern sogar unendlich gross ist. Berücksichtigt man dagegen, dass $\tan x$ an der Stelle $x = \frac{1}{2}\pi$ eine Unterbrechung der Kontinuität erleidet, so folgt aus Nr. 8. für $\xi = \frac{1}{2}\pi$ und $F(x) = \tan x$

$$\int_0^\pi \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan \pi - \tan o + Lim\left[\tan\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) - \tan\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)\right]$$

$$= Lim\left[\cot\delta + \cot\varepsilon\right] = \infty$$

wie es in der That sein muss.

Es verdient, namentlich der folgenden Untersuchungen wegen, noch besonders hervorgehoben zu werden, dass bei der Frage nach der Kontinuität oder Diskontinuität von $F(x)$ nicht nur die Art, wie x in der Funktion $F(x)$ vorkommt, und das für x geltende Integrationsintervall, sondern auch die konstanten Grössen, welche $F(x)$ enthalten könnte, in Berücksichtigung zu ziehen sind, weil es leicht geschehen kann, dass eine und dieselbe Funktion innerhalb des Integrationsintervalles stetig bleibt oder diskontinuirlich wird, je nachdem man einer in ihr vorkommenden Konstanten diesen oder jenen Werth ertheilt. Wenn z. B. aus der Formel

$$\int \frac{dx}{(r-x)^2} = \frac{1}{r-x} + Const.$$

die nachstehende zu folgen scheint

$$9) \qquad \int_a^b \frac{dx}{(r-x)^2} = \frac{1}{r-b} - \frac{1}{r-a} = \frac{b-a}{(r-b)(r-a)}$$

so ist letztere schlechterdings nicht allgemein richtig und ihre Gültigkeit lediglich auf den Fall beschränkt, dass r nicht zwischen a und b fällt; wäre nämlich im Gegentheile $b > r > a$, so würde x beim Durchlaufen des Intervalles $x = a$ bis $x = b$ unterwegs den Werth r annehmen und an dieser Stelle würde eine Diskontinuität in $F(x) = 1 : (r - x)$ eintreten; man hat daher für diesen Fall

$$\int_a^b \frac{dx}{(r-x)^2} = \frac{b-a}{(r-b)\,(r-a)} + Lim\left[\frac{1}{r-(r-\delta)} - \frac{1}{r-(r+\varepsilon)}\right]$$

$$= \frac{b-a}{(r-b)\,(r-a)} + Lim\left[\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\varepsilon}\right] = \infty$$

Auch hier ist die geometrische Bedeutung völlig klar; die Curve, deren Gleichung $y = 1 : (r - x)^2$ lautet, besteht aus zwei getrennten Zweigen, welche beide auf der positiven Seite der y liegen und die zur Abscisse $x = r$ gehörende unendliche Ordinate zur gemeinschaftlichen Asymptote haben (ähnlich wie in Fig. 2.); liegt nun r ausserhalb des Intervalles a bis b, so hat man es während dieses Intervalles immer nur mit dem einen jener beiden Zweige zu thun, welche für sich betrachtet stetig verlaufen, fällt dagegen r zwischen a und b, so besteht die gesuchte Fläche aus zwei getrennten Stücken, von denen das erste durch den einen und das zweite durch den anderen Curvenzweig begränzt wird. Jedes dieser Stücke ist für sich unendlich und mithin ist es auch ihre Summe, während die Formel 9. in diesem Falle, wo $b - a$ und $r - a$ positiv, dagegen $r - b$ negativ ist, eine negative Fläche geben würde.

Wir haben bisher vorausgesetzt, dass die Funktion $F(x)$ während des Intervalles $x = a$ bis $x = b$ nur eine einzige Unterbrechung der Kontinuität erleide, man wird aber hieraus leicht absehen, wie sich die Sache in dem Falle gestalten wird, wo mehrere solche Unterbrechungen der Stetigkeit eintreten. Fänden dieselben statt an den Stellen $x = \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$, wobei wir uns $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$

ihrer Grösse nach geordnet denken, so würde sich das von a bis b gehende Integral in eine Reihe anderer Integrale von a bis $\xi_1 - o$, von $\xi_1 + o$ bis $\xi_2 - o$, von $\xi_2 + o$ bis $\xi_3 - o$ etc. zerlegen lassen und hieraus entspringt dann die Formel

$$10)\ \int_a^b f(x)\,dx) = F(b) - F(a) + Lim\left[F(\xi_1 - \delta_1 - F(\xi_1 + \varepsilon_1)\right]$$
$$+ Lim\left[F(\xi_2 - \delta_2) - F(\xi_2 + \varepsilon_2)\right]$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$+ Lim\left[F(\xi_n - \delta_n) - F(\xi_n + \varepsilon_n\right]$$

in welcher δ_1, δ_2, ... δ_n, ε_1, ε_2, ... ε_n sämmtlich positive bis zur Null abnehmende Grössen bezeichnen.

II.

Wir beschäftigen uns jetzt mit dem bestimmten Integrale

$$\int_o^{2\pi} F(re^{ti})\,dt$$

worin r eine wesentlich positive Konstante und i die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ bezeichnet. Von der im Allgemeinen willkührlichen Grösse r setzen wir voraus, dass sie keinen individuellen Werth erhalte, vermöge dessen die Funktion $F(re^{ti})$ innerhalb des Intervalles $t = o$ bis $t = 2\pi$ eine Unterbrechung der Kontinuität erleiden könnte. Wäre z. B. $F(re^{ti})$ diskontinuirlich für $r = \varrho$ und $t = \tau$, so nehmen wir r entweder durchaus $< \varrho$ oder $> \varrho$, damit $F(re^{ti})$ nicht diskontinuirlich werde, wenn t innerhalb des Intervalles o bis 2π den Werth τ erreicht. Bezeichnen wir nun den unbekannten Werth des Integrales, der nur von r abhängen kann, mit $\varphi(r)$, setzen also

$$\int_a^b F(re^{ti})\,dt = \varphi(r)$$

so ist, wenn wir $r + \Delta r$ an die Stelle von r treten lassen, darauf subtrahiren und mit Δr dividiren

$$\int_a^b \frac{F(\overline{r + \Delta r}\, e^{ti}) - F(re^{ti})}{\Delta r}\, dt = \frac{\varphi(r + \Delta r) - \varphi(r)}{\Delta r}$$

Der unter dem Integralzeichen stehende Faktor von dt ist nichts Anderes als der partiell in Beziehung auf r genommene Differenzenquotient von $F(re^{ti})$, welcher so lange, als Δr eine angebbare Grösse hat, von dem partiellen Differenzialquotienten der Funktion $F(re^{ti})$ um irgend eine Grösse ϱ verschieden ist. Setzen wir daher

$$\frac{F(\overline{r + \Delta r}\, e^{ti}) - F(re^{ti})}{\Delta r} = \frac{d\, F(re^{ti})}{dr} + \varepsilon$$

wo nun ε mit Δr gleichzeitig bis zur Null abnimmt, so verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in:

$$\int_a^b \frac{d\, F(re^{ti})}{dr}\, dt + \int_o^{2\pi} \varepsilon\, dt = \frac{\varphi(r + \Delta r) - \varphi(r)}{\Delta r}$$

Für unendlich abnehmende Δr nähert sich das zweite Integral linker Hand aus naheliegenden Gründen der Null und es wird daher durch Uebergang zur Gränze

$$\int_o^{2\pi} \frac{d\, F(re^{ti})}{dr}\, dt = \frac{d\varphi(r)}{dr}$$

d. i. wenn man die Differenziation unter dem Integralzeichen ausführt

11) $$\int_o^{2\pi} e^{ti}\, F'(re^{ti})\, dt = \frac{d\varphi(r)}{dr}$$

Nun ist aber bei unbestimmter Integration

$$\int e^{ti}\, F'(re^{ti})\, dt = \frac{F(re^{ti})}{ri} + Const.$$

und da wir voraussetzen, dass $F(re^{ti})$ von $t = o$ bis $t = 2\pi$ keine Unterbrechung der Kontinuität erleide, so können wir den Werth

des in Nr. 11. vorkommenden bestimmten Integrales durch die Differenz zweier Spezialwerthe des unbestimmten Integrales ermitteln, so ergiebt sich

$$\int_o^{2\pi} e^{ti}\, F'(re^{ti})\, dt = \frac{F(re^{2\pi i}) - F(r)}{ri} = o$$

wobei r als von Null verschieden betrachtet wird. Die Gleichung 11. verwandelt sich jetzt in

$$o = \frac{d\varphi(r)}{dr}$$

woraus hervorgeht, dass $\varphi(r)$ von r unabhängig, also eine Konstante ist; diess giebt den merkwürdigen Satz:

12) $$\int_o^{2\pi} F(re^{ti})\, dt = C$$

Die Bestimmung der Konstante C richtet sich ganz nach der Natur der Funktion $F(re^{ti})$; ist diese so beschaffen, dass $F(re^{ti})$ kontinuirlich bleibt für alle möglichen r und t, so kann jeder spezielle Werth von r zur Ermittelung von C gebraucht werden; so erhält man für $r = o$, $2\pi F(o) = C$ und mithin

13) $$\int_o^{2\pi} F(re^{ti})\, dt = 2\pi F(o)$$

Für $F(x) = x^m$ z. B. wo m eine ganze positive Zahl bedeutet, tritt $F(re^{ti})$ nicht diskontinuirlich und daher ist

14) $$\int_o^{2\pi} (re^{ti})^m\, dt = o \text{ oder } \int_o^{2\pi} e^{mti}\, dt = o$$

wie man leicht verifiziren kann.

Wäre die Funktion $F(re^{ti})$ kontinuirlich für jedes t und r, wenn nur letzteres mehr als Null beträgt, so darf man den Werth von C nicht durch die Substitution $r = o$ bestimmen wollen, man kann sich aber in diesem Falle oft mit Vortheil der Substitution $r = \infty$ bedienen. So ist z. B. für $F(x) = x^{-m}$

d. h. Null, weil jedes einzelne Integral verschwindet. Wenn dagegen $r > \varrho$, so ist umgekehrt $\frac{\varrho}{r}$ ein ächter Bruch, der q heissen möge und man kann setzen

$$\frac{re^{ti}}{re^{ti} - \varrho e^{\tau i}} = \frac{1}{1 - \frac{\varrho}{r} e^{(\tau - t) i}} = \frac{1}{1 - q e^{(\tau - t) i}}$$

Daraus ergiebt sich für unser Integral die Reihenentwickelung

$$\int_o^{2\pi} [1 + q e^{(\tau - t) i} + q^2 e^{2(\tau - t) i} + q^3 e^{3(\tau - t) i} + \ldots] \, dt$$

und hier ist der Werth des ersten Integrales $= 2\pi$, während die übrigen Integrale verschwinden.

Erleidet die Funktion $F(re^{ti})$ innerhalb der Intervalle $r = o$ bis $r = \infty$ und $t = o$ bis $t = 2\pi$ mehrere Unterbrechungen der Kontinuität etwa für $r = \varrho_1, \varrho_2, \ldots$ und $t = \tau_1, \tau_2, \ldots$, so muss man die Fälle $\varrho_1 > r > o$, $\varrho_2 > r > \varrho_1$, $\varrho_3 > r > \varrho_2$ etc. unterscheiden und es müssen zur Bestimmung des in Rede stehenden Integralwerthes ebensoviel spezielle Substitutionen für r gemacht werden, als es solcher Fälle giebt, so dass im Allgemeinen das Integral auch ebensoviel verschiedene Werthe haben kann.

Besondere Aufmerksamkeit verdient noch der Fall $F(x) = \frac{f(x)}{x^m}$ also die Ermittelung des Werthes von

$$\text{18)} \qquad \int_o^{2\pi} (re^{ti})^{-m} f(re^{ti}) \, dt = C$$

worin m als ganze positive Zahl vorausgesetzt wird. Nehmen wir an, dass $f(re^{ti})$ beliebig viele Unterbrechungen der Kontinuität erleide, etwa für $r = r_1, r_2, \ldots, t = t_1, t_2, \ldots$ und nennen wir r_0 den kleinsten unter den Modulis r_1, r_2 etc., so würde man zunächst den Fall $r_0 > r > o$ zu unterscheiden haben und müsste

$r = o$ setzen um den Werth von C zu finden. Diess gäbe aber unter dem Integralzeichen $\infty\, f(o)$ und da dieser Ausdruck nichts bestimmtes sagt (indem $f(o) = o$ sein kann) so transformiren wir erst das Integral. Bei partieller Integration ist nun

$$\int (re^{ti})^{-m}\, f(re^{ti})\, dt$$

$$= r^{-m}\, f(re^{ti}) \int e^{-mti}\, dt - r^{-m} \int d f(re^{ti}) \int e^{-mti}\, dt$$

$$= -\frac{r^{-m}\, f(re^{ti})\, e^{-mti}}{mi} - r^{-m} \int f'(re^{ti})\, e^{ti}\, ri\, dt \,.\, \left(-\frac{e^{-mti}}{mi}\right)$$

$$= -\frac{r^{-m}\, e^{-mti}\, f(re^{ti})}{mi} + \frac{1}{m} \int (re^{ti})^{-(m-1)} f'(re^{ti})\, dt$$

und hieraus lässt sich der Werth des in 18. verzeichneten Integrales durch die Substitutionen $t = 2\pi$, $t = o$ und nachherige Subtraktion ableiten, indem wir $f(re^{ti})$ als kontinuirlich voraussetzen. Diess giebt

$$\int_o^{2\pi} (re^{ti})^{-m}\, f(re^{ti})\, dt = \frac{1}{m} \int_o^{2\pi} (re^{ti})^{-(m-1)} f'(re^{ti})\, dt$$

Die vorstehende Reduktionsformel kann auf das Integral rechter Hand selbst wieder angewendet werden, indem man $m - 1$ für m und $f'(re^{ti})$ für $f(re^{ti})$ setzt, wo nun $f'(re^{ti})$ kontinuirlich sein muss; es wird dann

$$\int_o^{2\pi} (re^{ti})^{-(m-1)}\, f'(re^{ti})\, dt = \frac{1}{m-1} \int_o^{2\pi} (re^{ti})^{-(m-2)}\, f''(re^{ti})\, dt$$

nochmalige Anwendung desselben Verfahrens giebt

$$\int_o^{2\pi} (re^{ti})^{-(m-2)}\, f''(re^{ti})\, dt = \frac{1}{m-2} \int_o^{2\pi} (re^{ti})^{-(m-3)}\, f'''(re^{ti})\, dt$$

Man übersieht gleich den Fortgang dieser Schlüsse; die letzte Gleichung dieser Art würde sein

$$\int_o^{2\pi} (re^{ti})^{-1} f^{(m-1)} (re^{ti}) \, dt = \frac{1}{1} \int_o^{2\pi} f^{(m)} (re^{ti}) \, dt$$

und sie erfordert die Kontinuität von $f^{(m-1)}(re^{ti})$. Substituirt man jede Gleichung in die vorhergehende, so findet man ohne Mühe

$$\int_o^{2\pi} (re^{ti})^{-m} f(re^{ti}) \, dt = \frac{1}{m(m-1) \, . \, . \, 2 \, . \, 1} \int_o^{2\pi} f^{(m)} (re^{ti}) \, dt$$

Ist nun auch $f^{(m)}(re^{ti})$ stetig für $r < r_0$ und alle t von o bis 2π, so kann man den Werth des Integrales rechter Hand mittelst der Substitution $r = o$ finden, nämlich nach Nr. 13.

$$\int_o^{2\pi} f^{(m)} (re^{ti}) \, dt = 2\pi f^{(m)} (o)$$

und so ergiebt sich der bemerkenswerthe Satz: wenn die Funktionen $f(re^{ti})$, $f'(re^{ti})$, $f''(re^{ti}) \ldots f^{(m)}(re^{ti})$ sämmtlich kontinuirlich bleiben für $r < r_0$ und alle t von o bis 2π, so ist

19) $$\int_o^{2\pi} (re^{ti})^{-m} f(re^{ti}) \, dt = \frac{2\pi f^{(m)}(o)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \ldots m}, \quad r_0 > r.$$

III.

Die Entwickelung des Theoremes von *Mac Laurin* und die Ermittelung der Determinationen, unter welchen dasselbe einzig und allein richtig bleibt, sind nichts als eine Anwendung der vorhin aufgestellten Fundamentalsätze. Nehmen wir einfach

$$F(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \, x$$

und denken uns a unter der komplexen Form $\varrho e^{\tau i}$, so ist

$$F(re^{ti}) = \frac{f(re^{ti}) - f(\varrho e^{\tau i})}{re^{ti} - \varrho e^{\tau i}} re^{ti}$$

und hier könnte eine Diskontinuität auf zweierlei Weise eintreten, entweder indem der Nenner sein Vorzeichen wechselt, oder indem der Zähler diskontinuirlich wird. Das Erste ist der Fall für $r = \varrho$, $t = \tau$, führt aber keine nothwendige Diskontinuität herbei, weil sich dann auch der Zähler annullirt und der ganze Ausdruck den Werth $f'(a) \,.\, a = f'(\varrho e^{\tau i})\, \varrho e^{\tau i}$ annimmt; letzterer ist aber im Allgemeinen eine endliche Grösse, weil wir die willkührliche Konstante a noch in der Gewalt haben und folglich dem ϱ und τ solche individuelle Werthe beilegen können, dass $f'(\varrho e^{\tau i})\, \varrho e^{\tau i}$ endlich bleibt. Dagegen tritt entschieden eine Diskontinuität bei $F(re^{ti})$ ein, wenn $f(re^{ti})$ eine Unterbrechung der Kontinuität erleidet und wir wollen annehmen, dass eine solche zum ersten Male für $r = r_0$ und $t = t_0$ vorkomme. In diesem Falle ist das Theorem 13. anwendbar, sobald wir $r < r_0$ voraussetzen und wir haben jetzt wegen $F(o) = o$,

$$\int_o^{2\pi} \frac{f(re^{ti}) - f(\varrho e^{\tau i})}{re^{ti} - \varrho e^{\tau i}} re^{ti}\, dt = o \quad , \quad r_0 > r$$

Beziehen wir die Integration einzeln auf den Minuenden und Subtrahenden, so folgt unter der Rücksicht, dass $f(\varrho e^{\tau i})$ konstant ist in Beziehung auf die Integration

$$\int_o^{2\pi} \frac{re^{ti}}{re^{ti} - \varrho e^{\tau i}} f(re^{ti})\, dt = f(\varrho e^{\tau i}) \int_o^{2\pi} \frac{re^{ti}}{re^{ti} - \varrho e^{\tau i}}\, dt \;,\; r_0 > r$$

Die Anwendung der Theoreme 16. und 17. giebt weiter

$$20) \quad \int_0^{2\pi} \frac{re^{ti}}{re^{ti} - \varrho e^{\tau i}} f(re^{ti})\, dt = o \quad , \quad r_0 > r < \varrho$$

$$21) \quad \int_0^{2\pi} \frac{re^{ti}}{re^{ti} - \varrho e^{\tau i}} f(re^{ti})\, dt = 2\pi f(\varrho e^{\tau i}) \, , \quad r_0 > r > \varrho.$$

Von diesen Formeln ist besonders die zweite von Interesse, weil sie zeigt, dass jede Funktion einer komplexen Variable $a = \varrho e^{\tau i}$ in ein bestimmtes Integral verwandelt werden kann, so lange nämlich der Modulus von a weniger beträgt, als der Modulus desjenigen komplexen Argumentes, für welche $f(x)$ zum ersten Male diskontinuirlich wird. Schreiben wir die Gleichung 21. in der Form

$$f(\varrho e^{\tau i}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - \frac{\varrho}{r} e^{(\tau - t)i}} f(re^{ti})\, dt \quad , \quad r_0 > r > \varrho$$

und verwandeln den ersten Faktor unter dem Integralzeichen in eine unendliche Reihe, was wegen $\frac{\varrho}{r} < 1$ erlaubt ist, so folgt

$$f(\varrho e^{\tau i}) =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[1 + \frac{\varrho}{r} e^{(\tau - t)i} + \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 e^{2(\tau - t)i} + \ldots\right] f(re^{t}) \, d^t$$

oder indem man jedes einzelne Glied integrirt

$$f(\varrho e^{\tau i}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{ti})\, dt + \frac{\varrho e^{\tau i}}{2\pi} \int_0^{2\pi} (re^{ti})^{-1} f(re^{ti})\, dt$$

$$+ \frac{(\varrho e^{\tau i})^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} (re^{ti})^{-2} f(re^{ti})\, dt + \ldots\ldots$$

Durch Anwendung des Theoremes 19. wird hieraus unter der Bedingung, dass $f(re^{ti})$, $f'(re^{ti})$, $f''(re^{ti})$ u. s. w. kontinuirlich bleiben innerhalb der Intervalle $r = o$ bis $r = r_0$ und $t = o$ bis $t = 2\pi$,

$$22)\quad f(\varrho e^{\tau i}) = f(o) + \frac{f'(o)}{1}\varrho e^{\tau i} + \frac{f''(o)}{1.2}(\varrho e^{\tau i})^2 + \frac{f'''(o)}{1.2.3}(\varrho e^{\tau i})^3 + \ldots\ldots$$

$$r_0 > \varrho \geqq o$$

und dies ist das Theorem von *Mac Laurin* in seiner Ausdehnung auf complexe Argumente. Die Gültigkeit desselben setzt voraus, dass ein Intervall $r = o$ bis $r = r_0$ giebt, innerhalb dessen die Funktionen $f(re_{ti})$, $f'(re_{ti})$, $f''(re_{ti})$ etc. stetig bleiben, man mag t einen Werth geben was man will und man kann daher folgende Regel aufstellen:

> Man suche diejenigen (reellen oder complexen) Werthe von x auf, für welche die Funktionen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ... diskontinuirlich werden und nenne x_0 dasjenige unter den so erhaltenen Argumenten, welches den absolut kleinsten Modulus hat; die Gleichung
>
> $$f(x) = f(o) + \frac{f'(o)}{1}x + \frac{f''(o)}{1.2}x^2 + \ldots\ldots$$
>
> gilt dann für alle x, deren Modulus weniger als der Modulus von x_0 beträgt.

Ueber die so gesteckten Gränzen hinaus gilt das Theorem von *Mac Laurin* nicht, weil dann alle die Sätze, auf denen die Ableitung desselben beruhte, ihre Gültigkeit verlieren.

Als Beispiel für das obige Kriterium nehmen wir

$$f(x) = l(x + \sqrt{1 + x^2})$$

es wird dann

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ ,\quad f''(x) = -\frac{x}{(\sqrt{1+x^2})^3}\ ,\quad \text{etc.}$$

wo man gleich übersieht, dass alle folgenden Differenzialquotienten Brüche sein werden, welche ganze rationale algebraische Funktionen zu Zählern und Potenzen von $\sqrt{1+x^2}$ zu Nennern haben werden. Die Diskontinuität kann daher nur auf eine einzige Art, nämlich durch das Verschwinden des Nenners entstehen. Aus $1+x^2=o$ folgt aber $x=\pm\sqrt{-1}$ d. h. $x_0 = cos\,\frac{1}{2}\pi \pm i sin\,\frac{1}{2}\pi$ und $mod\,x_0 = 1$. Die Reihenentwickelung

$$l(x+\sqrt{1+x^2}) = \frac{x}{1} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} - \ldots$$

gilt daher nur für solche x, deren Modulus weniger als die Einheit beträgt. Wollte man sich auf reelle x beschränken, so würde diese Bedingung in $1 > x > -1$ übergehen.

II.

Die Bürmann'sche Reihe.

---

hohen Allgemeinheit und vielfachen Anwendbarkeit die grösste Beachtung verdient, und wenn man sie gleichwohl in keinem Lehrbuche findet (selbst *Lacroix* und das mathematische Wörterbuch geben nur das Nothdürftigste), so mag der Grund dieser auffallenden Erscheinung in dem Umstande zu suchen sein, dass man sich bisher über die Gültigkeitsbedingungen der Bürmann'schen Reihe völlig im Dunkeln befand, woraus natürlich eine gewisse Unsicherheit in ihrer Anwendung entspringen musste. Es dürfte daher eine neue Bearbeitung dieses Gegenstandes nicht nur kein überflüssiges, sondern vielmehr ein vom jetzigen Standpunkte der Wissenschaft gebotenes Unternehmen sein.

§. 1.

Die Bedingungen der Reihenentwickelung.

Wir setzen zunächst, um eine sprechendere Bezeichnung zu haben,

$$1)\qquad f(x) = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 t + \frac{1}{2'} A_2 t^2 + \frac{1}{3'} A_3 t^3 + \dots$$

wobei überhaupt n' so viel bedeutet wie $1.2.3\dots n$; wegen

$$2)\qquad t = \varphi(x)$$

ist dann auch, wenn wir statt $[\varphi(x)]^n$ kurz $\varphi(x)^n$ schreiben

$$3)\qquad f(x) = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 \varphi(x) + \frac{1}{2'} A_2 \varphi(x)^2 + \frac{1}{3'} A_3 \varphi(x)^3 + \dots$$

Um zunächst die Bedingungen kennen zu lernen, unter welchen eine derartige Reihenentwickelung möglich und gültig ist, erinnern wir uns an die Determinationen, welche man für das Theorem von *Mac Laurin* aufgestellt hat; diesen zufolge gilt eine Gleichung wie

4) $$F(t) = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 t + \frac{1}{2'} A_2 t^2 + \frac{1}{3'} A_3 t^3 + \ldots\ldots$$

$$[A_n = F^{(n)}(o)]$$

nur in soweit, als die Funktion $F(t)$ nebst ihren Differenzialquotienten $F'(t)$, $F''(t)$ etc. für komplexe t endlich und stetig bleibt, d. h. bestimmter ausgedrückt: wenn eine der Funktionen $F(t)$, $F'(t)$, $F''(t)$ etc. diskontinuirlich wird für einen speziellen Werth von t, welcher τ heissen möge und im Allgemeinen unter der complexen Form $\tau = \varrho(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega)$ enthalten ist, so gilt die Gleichung 4. für alle diejenigen $t = r(\cos u + \sqrt{-1}\sin u)$, deren Moduli r der Ungleichung

$$\varrho > r \geqq o \text{ oder } mod\,\tau > mod\,t \geqq o$$

Genüge leisten. Diese Bedingungen lassen sich leicht auf die Entwickelung 1. übertragen, wenn man dieselbe mit der Gleichung 4. zusammenhält, also

5) $$F(t) = f(x)$$

setzt, und die Differenzialquotienten von $F(t)$ durch die Differenzialquotienten von $f(x)$ ausdrückt. Es ist dann

$$F'(t) = \frac{d\,F(t)}{dt} = \frac{d\,f(x)}{dt} = \frac{d\,f(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = f'(x)\,\frac{dx}{dt}$$

wo rechter Hand noch t wegzuschaffen ist. Aus Nr. 2. folgt aber durch Differenziation

6) $$dt = \varphi'(x)\,dx \text{ oder } \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\varphi'(x)}$$

und mithin durch Substitution in das Vorhergehende

7) $$F'(t) = \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

Eine zweite Differenziation in Beziehung auf t liefert

$$F''(t) = \frac{\varphi'(x)\,\frac{df'(x)}{dt} - f'(x)\,\frac{d\varphi'(x)}{dt}}{\varphi'(x)^2}$$

$$= \frac{\varphi'(x)f''(x) - f'(x)\varphi''(x)}{\varphi'(x)^2} \cdot \frac{dx}{dt}$$

und weil der Werth von $\frac{dx}{dt}$ aus Nr. 6. bekannt ist

8) $$F''(t) = \frac{f''(x)\varphi'(x) - f'(x)\varphi''(x)}{\varphi'(x)^3}$$

Weitere Differenziation in Beziehung auf t giebt nach einer kleinen Reduktion

$$F'''(t) =$$
$$\frac{[f'''(x)\varphi'(x) - f'(x)\varphi'''(x)]\,\varphi'(x) - [f''(x)\varphi'(x) - f'(x)\varphi''(x)]\,3\varphi''(x)}{\varphi'(x)^4} \times \frac{dx}{dt}$$

oder vermöge des Werthes von $\frac{dx}{dt}$ und geordnet

9) $$F'''(t) =$$
$$\frac{f'''(x)\varphi'(x)^2 - 3f''(x)\varphi'(x)\varphi''(x) + f'(x)[3\varphi''(x)^2 - \varphi'(x)\varphi'''(x)]}{\varphi'(x)^5}$$

Es ist nicht nöthig, diese Rechnung, welche bald sehr verwickelt wird, weiter fortzusetzen, man übersieht bereits im Allgemeinen das Gesetz, wonach sich die Ausdrücke für $F'(t)$, $F''(t)$, $F'''(t)$ etc. gestalten; sämmtliche Differenzialquotienten sind nämlich Brüche, in deren Zählern der Reihe nach die Funktionen $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ etc. verbunden mit $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, $\varphi'''(x)$ etc. vorkommen; die Nenner werden durch die ungeraden Potenzen von $\varphi'(x)$ gebildet.

Die Kontinuität und Endlichkeit der Differenzialquotienten $F'(t)$, $F''(t)$ etc., von welcher die Gültigkeit der Gleichung 4. abhängt, würde nun offenbar nicht vorhanden sein, wenn eine der Funktionen $f'(x)$, $f''(x)$ etc. oder $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ etc. aufhörte endlich und stetig zu bleiben, wie man unmittelbar aus den Gleichungen 7., 8., 9. ersieht, und wir müssen daher als erste Bedingung die Stetigkeit und Endlichkeit sowohl der Funktionen $f'(x)$, $f''(x)$ etc. als der Funktionen $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ etc, voraussetzen. Diess ist gerade die Bedingung, unter welcher jede der Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ für sich allein in eine Potenzenreihe (d. h. in eine Reihe von der Form $\alpha + \beta x + \gamma x^2 +$ etc.) verwandelbar sein würde, wenigstens innerhalb gewisser Gränzen, und wir sprechen deshalb die erste der gefundenen Bedingungen lieber in dieser kürzeren Form aus.

Die soeben aufgestellte Determination ist nun zwar nothwendig aber durchaus nicht hinreichend; denn setzen wir sie als erfüllt voraus, so sind wohl die Zähler der für $F'(t)$, $F''(t)$ etc. gleichgeltenden Brüche stetig und endlich, aber trotzdem können die Brüche unendlich und auch gleichzeitig diskontinuirlich werden, wenn nämlich die Nenner in Null übergehen; dieser Fall tritt ein, sobald $\varphi'(x)$ verschwindet, also $\varphi(x)$ einen Maximal- oder Minimalwerth erreicht. Nehmen wir an, es werde $\varphi'(x) = o$ für $x = \xi$, wo nun ξ auch von komplexer Form sein kann, so ist $\tau = \varphi(\xi)$ derjenige spezielle Werth $t = \varphi(x)$, für welchen von $F'(t)$, $F''(t)$ etc. unendlich werden, indem sie den Nenner $\varphi'(\xi) = o$ erhalten, so muss jetzt statt der früheren Bedingung $mod\,\tau > mod\,t \geqq o$ die neue Bedingung

$$mod\,\varphi(\xi) > mod\,\varphi(x) \geqq o$$

gesetzt werden, welche für ausschliesslich reelle x, wie sie bei der obigen Reihenentwickelung gewöhnlich nur vorkommen, die etwas einfachere Form

$$mod\,\varphi(\xi) > \varphi(x) \geqq o$$

annimmt. Hieraus lässen sich die Gränzen für x leicht bestimmen, indem man nur die beiden Gleichungen

$$\varphi(x) = o \text{ und } \varphi(x) = mod\,\varphi(\xi)$$

aufzulösen hat. Dabei ist noch Eines zu beachten; die frühere Bedingung $mod\,\tau > mod\,t \geqq o$ oder bei reellen t, $mod\,\tau > t \geqq o$ setzt stillschweigend voraus, dass $mod\,\tau$ von Null verschieden sei und t von Null bis $mod\,\tau$ anwachse, es muss also auch die für t gesetzte Funktion $\varphi(x)$ eine, wenigstens innerhalb des Gültigkeitsintervalles zunehmende Funktion sein. Bezeichnen wir demnach mit a eine Wurzel der Gleichung $\varphi(x) = o$ und mit b eine Wurzel der Gleichung $\varphi(x) = mod\,\varphi(\xi)$, so wird erfordert, dass $\varphi(x)$ wachse, während des Intervalles $x = a$ bis $x = b$. Fassen wir alles Bisherige zusammen, so können wir folgende Regel aussprechen:

Um die Gültigkeitsgränzen für die Reihenentwickelung

10) $$f(x) = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 \varphi(x) + \frac{1}{2'} A_2 \varphi(x)^2 + \dots$$

auszumitteln, bestimme man zunächst diejenigen Werthe ξ von x, für welche $\varphi'(x) = o$ wird und löse darauf die Gleichungen

11) $$\varphi(x) = o, \quad \varphi(x) = mod\,\varphi(\xi)$$

auf, deren Wurzeln beziehungsweise a und b heissen mögen. Wenn nun $\varphi(x)$ zunimmt von $x = a$ bis $x = b$, so gilt die obige Entwickelung unter der Determination $b > x \geqq a$, vorausgesetzt noch, dass $f(x)$ und $\varphi(x)$ Funktionen sind, von denen jede für sich innerhalb dieses Intervalles in eine Potenzenreihe verwandelbar sein würde.

Bevor wir weiter gehen, wollen wir erst ein Beispiel geben; es sei

$$f(x) = Arctan\,x,\quad \varphi(x) = x(1 + x^2)$$

so dass es sich also um die Entwickelung

$$12)\quad Arctan\,x = A_0 + \frac{1}{1'} A_1\; x(1 + x^2) + \frac{1}{2'} A_2\, x^2 (1 + x^2)^2 + \ldots.$$

handeln würde Es ist dann $\varphi'(x) = 1 + 3x^2$ und aus $\varphi'(x) = o$ ergeben sich dann für x die speziellen Werthe

$$\xi = \pm \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{3}}$$

und durch Substitution in $\varphi(x)$ wird jetzt

$$\varphi(\xi) = \pm \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \pm \frac{2\sqrt{-1}}{3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(\cos\frac{\pi}{2} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

mithin

$$mod\,\varphi(\xi) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

Die Gleichungen 10. und 11. gestalten sich jetzt wie folgt

$$x(1 + x^2) = o,\quad x(1 + x^2) = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9} = 0{,}38490\ldots$$

Da wir uns auf reelle Werthe von x beschränken, so können wir von diesen Gleichungen nur die reellen Wurzeln benutzen; es ergiebt sich dann aus der ersten Gleichung $x = o$ und aus der zweiten $x = 0{,}34401\ldots$ Innerhalb dieser Gränzen wächst die Funktion $x(1 + x^2)$ und würden auch $Arctan\,x$ und $x(1 + x^2)$ für sich allein in Potenzenreihen verwandelbar sein; die Gleichung 12.

gilt daher für $0{,}344 \ldots > x \geqq o$, ein Resultat, welches wir nachher *a posteriori* verifiziren werden.

Aus den vorhin ausgesprochenen Gültigkeitsbedingungen geht übrigens hervor, dass es mehrere Intervalle geben kann, für welche die fragliche Reihenentwickelung Bestand hat, sobald nämlich die Gleichungen $\varphi(x) = o$ und $\varphi(x) = mod\, \varphi(\xi)$ mehrere reelle Wurzeln zulassen. Dann gehört aber auch zu jedem solchen Gültigkeitsintervalle eine besondere Koeffizientenbestimmung, wie der nächste Paragraph zeigen wird.

Noch müssen wir einer Ausnahme erwähnen, welcher die allgemeine Regel unterworfen sein kann; wir haben nämlich stillschweigend vorausgesetzt, dass die Differenzialquotienten $F'(t)$, $F''(t)$ etc. wirkliche und nicht nur scheinbar gebrochene Funktionen sind; findet aber der letztere Umstand statt, so kann natürlich von allen vorhergehenden Schlüssen nicht mehr die Rede sein und es hängt dann die Gültigkeit der Entwickelung von der speziellen Natur der Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ ab. Nehmen wir z. B. $\varphi(x) = Arctan\, x$, so dass es sich also um eine Entwickelung von der Form

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{1'} A_1\, Arctan\, x + \frac{1}{2'} A_2\, Arc^2 tan\, x + \ldots.$$

handelt, so wird $\varphi'(x) = 1 : (1 + x^2)$ und nach Nr. 7., 8. etc.

$$F'(t) = f'(x)\,(1 + x^2)$$
$$F''(t) = f''(x)\,(1 + x^2)^2 + 2x f'(x)\,(1 + x^2)$$
u. s. f.

Man übersieht gleich, dass hier keine Nenner vorkommen, welche sich annulliren könnten und dass folglich die Funktionen $F'(t)$, $F''(t)$ etc. eben so lange stetig und endlich bleiben, als diess mit $f'(x)$, $f''(x)$ etc. der Fall ist; jene Reihenentwickelung gilt daher

unter denselben Bedingungen, unter welchen $f(x)$ in eine Potenzenreihe verwandelbar ist.

Die bezeichnete Ausnahme findet übrigens bei allen Funktionen $\varphi(x)$ statt, deren Differenzialquotient unter der Form steht:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{[\psi(x)]^{\mu}}$$

worin $\psi(x)$ eine ganze rationale abgebraische Funktion x und μ eine positive Zahl bezeichnet; näher lässt sich die Natur dieser Funktionen nicht angeben, weil das Integral, welches $\varphi(x)$ bestimmen würde, sich allgemein nicht ausdrücken lässt. Bei ganzen μ führt es auf Logarithmen und Kreisbögen, ausserdem auf elliptische oder Abel'sche Transscendenten.

§. 2.

Die Koeffizientenbestimmung.

Nachdem für alle möglichen Fälle die Bedingungen entwickelt sind, unter welchen die Gleichung

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 \varphi(x) + \frac{1}{2'} A_2 \varphi(x)^2 + \dots$$

besteht, ist es nun unsere Aufgabe, die bisher noch nicht hinreichend bekannten Koeffizienten A_0, A_1, A_2 ... zu bestimmen. Der erste von ihnen findet sich leicht, denn setzt man für x den speziellen Werth a, der $\varphi(x)$ verschwinden macht, so wird

$$A_0 = f(a) \tag{13}$$

Auf ähnliche Weise könnte man die übrigen Koeffizienten bestimmen wollen, indem man sich erinnert, dass für $\varphi(x) = t$, $f(x) = F(t)$

$$A_n = F^{(n)}(t = o)$$

ist; setzt man daher in den Gleichungen 7., 8. etc. $x = a$, wodurch in der That $t = \varphi(x)$ in Null übergeht, so erhält man

$$A_1 = F(o) = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$$

$$A_2 = F'(o) = \frac{f''(a)\varphi'(a) - f'(a)\varphi''(a)}{\varphi'(a)^3}$$

u. s. w.

Es würde aber nicht leicht sein, das Gesetz zu entdecken, nach welchem sich diese Ausdrücke bilden und wir müssen daher, um zu einer independenten Koeffizientenbestimmung zu gelangen, einen anderen Weg einschlagen. Zu diesem Zwecke leiten wir erst eine Formel ab, welche nachher benutzt werden soll.

Sei P eine Funktion, welche für $x = a$ endlich bleibt und von welcher auch die Differenzialquotienten dieselbe Eigenschaft besitzen, so hat man nach der bekannten Regel für die Differenziation der Produkte

$$\frac{d^k[(x-a)^m P]}{dx^k} = (x-a)^m \frac{d^k P}{dx^k} + k_1 \frac{d(x-a)^m}{dx} \cdot \frac{d^{k-1} P}{dx^{k-1}} + k_2 \frac{d^2(x-a)^m}{dx^2} \cdot \frac{d^{k-2} P}{dx^{k-2}} + \dots\dots$$

worin k_1, k_2 etc. die Binomialkoeffizienten k, $\frac{1}{2}k(k-1)$ etc. bezeichnen. Führen wir die einzelnen Differenziationen der Potenz $(x-a)^m$ aus, so wird unter Gebrauch der bekannten Bezeichnung $\frac{d\psi(x)}{dx} = D\psi(x)$

$$\textbf{14)}\quad D^k[(x-a)^m P] = (x-a)^m \cdot D^k P + mk_1(x-a)^{m-1} \cdot D^{k-1} P + m(m-1)k_2(x-a)^{m-2} \cdot D^{k-2} P + \dots\dots$$

und hier unterscheiden wir die drei Fälle $k < m$, $k = m$, $k > m$, indem wir m als ganze positive Zahl ansehen. Im ersten Falle hört die Reihe mit dem Gliede

$$m(m-1)\ \ldots\ (m-\overline{k-1})\ k_k\ (x-a)^{m-k}\ P$$

auf und alle Glieder enthalten Potenzen von $x - a$, welche ganze positive von Null verschiedene Exponenten besitzen; für $x = a$ verschwindet daher Alles und es wird

$$\text{15)}\qquad \Big\{D^k[(x-a)^m P]\Big\}_a = o,\ m < k$$

wobei der angehangene Index a bedeuten soll, dass nach geschehener Differenziation $x = a$ zu setzen ist. Im Falle $m = k$ sind die beiden letzten Glieder der Reihe 14.

$$m(m-1)\ \ldots .\ (m-\overline{k-2})\,k_{k-1}\ (x-a)^1\ .\ DP$$

$$m(m-1)\ \ldots\ (m-\overline{k-1})\,k_k\ (x-a)^0\ .\ P$$

und wenn man jetzt $x = a$ setzt, so verschwinden alle Glieder mit Ausnahme des letzten; also

$$\text{16)}\qquad \Big\{D^k[(x-a)^k P]\Big\}_a = k(k-1)\ldots 2\ .\ 1\ .\ P_a$$

Ist endlich $k > m$, so bricht die Reihe 14. mit folgenden zwei Gliedern ab:

$$m(m-1)\ \ldots .\ (m-\overline{m-2})\,k_{m-1}\ (x-a)^1 .\ DP$$

$$m(m-1)\ \ldots\ (m-\overline{m-1})\ k_m\ (x-a)^0 .\ P$$

und es wird für $x = a$

$$\text{17)}\qquad \Big\{D^k[(x-a)_m P]\Big\}_a = m(m-1)\ \ldots\ 2\ .\ 1\ .\ k_m\, P_a$$

Alles zusammengefasst giebt die Formel

$$\text{18)}\qquad \Big\{D^k[(x-a)_m P]\Big\}_a = o,\qquad \text{für } k < m$$

$$= m'\, k_m\ .\ P_a,\ \text{für } k \geqq m.$$

Diese einfache Beziehung lässt sich nun auf folgende Weise zur Bestimmung der Koeffizienten A in der Gleichung

$$19)\qquad f(x) = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 \varphi(x) + \frac{1}{2'} A_2 \varphi(x)^2 + \dots$$

benutzen. Wir multipliziren die Gleichung mit

$$20)\qquad \left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^n = Q^n$$

wobei Q zur Abkürzung dient und schreiben jetzt die Gleichung in der Form

$$f(x)\, Q^n = A_0\, Q^n + \frac{1}{1'} A_1 (x-a)\, Q^{n-1} + \frac{1}{2'} A_2 (x-a)^2\, Q^{n-2} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{(n-1)'} A_{n-1} (x-a)^{n-1} Q + \frac{1}{n'} A_n (x-a)^n$$

$$+ \frac{1}{(n+1)'} A_{n+1} (x-a)^n \varphi(x) + \frac{1}{(n+2)'} A_{n+2} (x-a)^n \varphi(x)^2$$

$$+ \dots\dots\dots\dots$$

Diese Gleichung werde n mal in Beziehung auf x differenzirt und nach geschehener Differenziation $x = a$ gesetzt; es lässt sich dann rechter Hand auf jedes einzelne Glied die Formel 18. anwenden, indem man $k = n$ und der Reihe nach

$$m = 0,\quad 1,\quad 2,\quad \dots n-1,\ n,\ n+1,\ \dots$$

$$P = Q^n,\ Q^{n-1},\ Q^{n-2},\ \dots\quad Q,\quad 1,\quad \varphi(x),\ \dots$$

setzt. Dabei verschwinden alle Glieder, für welche $k < m$, d. h. n kleiner als Zahlen aus der Reihe $1, 2, \dots$ *in inf.* wird; dieser Fall tritt bei denjenigen Gliedern ein, welche die Koeffizienten A_{n+1}, A_{n+2} etc. enthalten und so bleibt

$$21)\quad \left\{D^n[f(x)Q^n]\right\}_a = A_0\left\{D^n Q^n\right\}_a + n_1 A_1 \left\{D^{n-1} Q^{n-1}\right\}_a + \dots$$
$$\dots + n_{n-1}A_{n-1}\left\{D^1 Q^1\right\}_a + n_n A_n .$$

Mit einer kleinen Modifikation lässt sich dasselbe Verfahren anwenden um eine ganz ähnliche Formel zu entwickeln, welche sich von der vorstehenden nur dadurch unterscheidet, dass rechter Hand in ihr A_n fehlt. Bezeichnen wir nämlich zur Abkürzung DQ mit Q', so ist durch Multiplikation der Gleichung 19. mit $n\,Q^{n-1}Q'$

$$f(x)\,n\,Q^{n-1}Q' = n A_0\,Q^{n-1}Q' + \frac{n}{1'}\,A_1(x-a)\,Q^{n-2}Q'$$
$$+ n A_2(x-a)^2\,Q^{n-3}Q'$$
$$+ \dots + \frac{n}{(n-1)'}\,A_{n-1}(x-a)^{n-1}Q^0 Q' + \frac{n}{n'}\,A_n(x-a)^n\varphi(x)\,Q'$$
$$+ \frac{n}{(n+1)'}\,A_{n+1}(x-a)^{n+1}\varphi(x)^2\,Q' + \dots$$

Differenzirt man $(n-1)$mal und setzt dann $x = a$, so kann wiederum die Formel 18. für $k = n-1$ und

$$m = 0,\quad 1,\quad 2,\ \dots\ n-1,\quad n,\quad \dots$$
$$P = Q^{n-1}Q',\quad Q^{n-2}Q',\quad Q^{n-3}Q',\ \dots\quad Q',\quad \varphi(x)\,Q',\ \dots$$

in Anspruch genommen werden; man erhält auf diese Weise

$$\left\{D^{n-1}\left[f(x)\,n\,Q^{n-1}Q'\right]\right\}_a = n A_0\left\{D^{n-1}\left[Q^{n-1}Q'\right]\right\}_a$$
$$+ n(n-1)_1 A_1 \left\{D^{n-2}\left[Q^{n-2}Q'\right]\right\}_a$$
$$+ n(n-1)_2 A_2 \left\{D^{n-3}\left[Q^{n-3}Q'\right]\right\}_a + \dots$$
$$\dots + n(n-1)_{n-1}A_{n-1}Q'_a$$

Hier stehen alle Glieder rechter Hand unter der allgemeinen Form

22) $$n\,.\,(n-1)_p A_p \left\{D^{n-p-1}\,[Q^{n-p-1}\,Q']\right\}_a$$

und wenn man berücksichtigt, dass

$$D(Q^{n-p}) = (n-p)\,Q^{n-p-1}\,DQ = (n-p)\,Q^{n-p-1}\,Q'$$

mithin umgekehrt

$$Q^{n-p-1}\,Q' = \frac{D(Q^{n-p})}{n-p}$$

ist, so kann man dem allgemeinen Gliede in Nr. 22. folgende Form ertheilen

$$n(n-1)_{p-1} A_p \left\{D^{n-p-1}\left[\frac{D(Q^{n-p})}{n-p}\right]\right\}_a =$$

$$\frac{n(n-1)_{p-1}}{n-p}\;A_p\;\left\{D^{n-p-1}\,D(Q^{n-p})\right\}_a$$

oder vermöge einer bekannten Eigenschaft der Binomialkoeffizienten und weil $D^{n-p-1}D(Q^{n-p}) = D^{n-p}(Q^{n-p})$ ist

$$n_p A_p \left\{D^{n-p}\,Q^{n-p}\right\}_a$$

Die Reihe, von welcher in Nr. 22. das allgemeine Glied verzeichnet stand, erhält jetzt folgende Gestalt

$$\left\{D^{n-1}\;[f(x)\,n\,Q^{n-1}\,Q']\right\}_a$$

$$= A_0\left\{D^n\,Q^n\right\}_a + n_1 A_1\left\{D^{n-1}\,Q^{n-1}\right\}_a + \dots + n_{n-1}A_{n-1}\left\{D^1\,Q^1\right\}_a$$

und wenn man sie von der Gleichung 21. subtrahirt, so bleibt rechter Hand nur $n_n A_n = A_n$ übrig. Demnach ist

23) $$A_n = \left\{D^n\,[f(x)\,Q^n]\right\}_a - \left\{D^{n-1}[f(x)\,n\,Q^{n-1}\,Q']\right\}_a$$

was sich aber sehr zusammenziehen lässt; man hat nämlich

$$D^n[f(x)Q^n] = D^{n-1}D[f(x)Q^n]$$
$$= D^{n-1}[f(x)nQ^{n-1}Q' + f'(x)Q^n]$$
$$= D^{n-1}[f(x)nQ^{n-1}Q'] + D^{n-1}[f'(x)Q^n]$$

und folglich durch Substitution in die Formel für A_n (Nr. 23.)

$$A_n = \left\{D^{n-1}[Q^n f'(x)]\right\}_a$$

d. i. vermöge der Bedeutung von Q aus Nr. 20.

24) $$A_n = D^{n-1}\left\{\left[\frac{x-a}{\varphi(x)}\right]^n f'(x)\right\}_{(x=a)}$$

wobei die angehangene Gleichung $x = a$ bedeuten soll, dass nach geschehener Differenziation $x = a$ zu setzen ist. Die hiermit gewonnene Formel giebt nun in der That die independente Koeffizientenbestimmung.

Um die hauptsächlichsten Entwickelungsformeln beisammen zu haben, wollen wir vor den weiteren Konsequenzen, welche aus der Bürmann'schen Reihe gezogen werden können, die wichtigsten Spezialisirungen der Funktion $\varphi(x)$ betrachten.

§. 3.

Die Spezialisirungen $\varphi(x) = x(1 \pm x)$.

I. Nehmen wir zuerst $\varphi(x) = x(1 + x)$, so können wir $a = o$ setzen, weil $\varphi(x)$ für diesen Werth von x verschwindet. Weiter ist nun $\varphi'(x) = 1 + 2x$ und wenn dieser Ausdruck $= o$ gesetzt wird, so folgt $x = \xi = -\frac{1}{2}$, ferner $\varphi(\xi) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} = \frac{1}{4}(\cos\pi \pm \sqrt{-1}\sin\pi)$ also $mod\,\xi = \frac{1}{4}$; aus der Gleichung $x(1 + x) = \frac{1}{4}$ ergiebt sich jetzt

$$x = \frac{\mp\sqrt{2} - 1}{2} = b$$

und von diesen beiden Werthen, welche b haben kann, dürfen wir nur den positiven Werth benutzen, weil $\varphi(x) = x(1 + x)$ nur wächst von $x = o$ bis $x = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)$, dagegen abnimmt von $x = o$ bis $x = \frac{1}{2}(-\sqrt{2} - 1)$. So gelangen wir denn zu dem Satze:

Wenn die Funktion $f(x)$ innerhalb der Gränzen $x = o$ bis $x = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)$ in eine Potenzenreihe verwandelbar ist, so gilt innerhalb dieses Intervalles die Entwickelung

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 x(1 + x) + \frac{1}{2'} A_2 x^2 (1 + x)^2 + \ldots \tag{25}$$

und in ihr werden die Koeffizienten durch die Formeln bestimmt

$$\begin{aligned} A_0 &= f(o) \\ A_n &= D^{n-1}\left[\frac{f'(x)}{(1 + x)^n}\right]_{(x=o)} . \end{aligned} \tag{26}$$

Wendet man die bekannte Regel für die Differenziation eines Produktes auf den Differenzialquotienten

$$D^{n-1}\left[\frac{f'(x)}{(1 + x)^n}\right] = D^{n-1}\left[(1 + x)^{-n} f'(x)\right]$$

an, so findet man ohne Mühe

$$A_n = f^{(n)}(o) - \frac{n(n - 1)}{1} f^{(n-1)}(o) + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} f^{(n-2)}(o) - \ldots \tag{27}$$

was in dem Falle bequem ist, wo sich die Differenzialquotienten von $f(x)$ unmittelbar leicht angeben lassen.

Um ein Beispiel zu haben sei $f(x) = (1 + x)^\mu$, so kann man $f(x)$ innerhalb der Gränzen $x = o$, $x = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)$ nach dem Binomialtheoreme in eine Potenzenreihe verwandeln und daher ist in unserem Falle die Entwickelung ohne fernere Einschränkung erlaubt; man hat nach Nr. 26.

$$A_0 = 1,\ A_1 = \left[\frac{\mu(1 + x)^{\mu - 1}}{1 + x}\right]_{(x = o)} = \mu$$

$$A_n = \mu\ \left[D^{n-1}(1 + x)^{\mu - n - 1}\right]_{(x = o)}$$

$$= \mu\ .\ (\mu - n - 1)\ (\mu - n - 2)\ \ldots.\ (\mu - 2n + 1)$$

und folglich, wenn man die letztere Formel für $n = 2, 3, 4 \ldots$ in Anwendung bringt,

$$(1 + x)^\mu = 1 + \frac{\mu}{1} x(1 + x) + \frac{\mu(\mu - 3)}{1\ .\ 2} x^2(1 + x)^2$$

$$+ \frac{\mu(\mu - 4)(\mu - 5)}{1\ .\ 2\ .\ 3} x^3(1 + x)^3$$

$$+ \frac{\mu(\mu - 5)(\mu - 6)(\mu - 7)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4} x^4(1 + x)^4 + \ldots.$$

$$\frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1) > x \geqq o.$$

Dass in der That die Gültigkeit dieser Formel sich nicht über die angegebenen Gränzen hinaus erstreckt, ist leicht *a posteriori* einzusehen; bezeichnen wir nämlich die Reihenglieder mit u_0, u_1, u_2, ..., so ist

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(\mu - 2n)\ (\mu - 2n - 1)}{(\mu - n - 1)\ (n + 1)}\ x(1 + x)$$

und für unendlich wachsende n

$$Lim\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = -\ 4\ x(1 + x)$$

Zur Konvergenz der Reihe ist aber nothwendig, dass der absolute Werth dieser *Limes* weniger als die Einheit betrage und man hat daher

$$x(1+x) < \frac{1}{4}$$

woraus wie früher $x < \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$ folgt.

Da nicht nur $x = o$, sondern auch $x = -1$ eine Wurzel der Gleichung $x(1+x) = o$ ist, so darf man $a = -1$ nehmen, um auf diese Weise zu einer zweiten Reihenentwickelung zu gelangen. Nun war $b = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{2}-1)$ und jetzt können wir von diesen Werthen nur den negativen gebrauchen, weil $x(1+x)$ innerhalb des Intervalles $x = -1$ bis $x = \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$ abnehmen würde, dagegen zunimmt von $x = -1$ bis $x = -\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)$ wie man aus dem Differenzialquotienten der Funktion sogleich ersieht. Unter der Bedingung, dass x zwischen den Gränzen -1 und $-\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)$ liege, ist jetzt für $a = -1$ nach 24.

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{1'}A_1\ x(1+x) + \frac{1}{2'}A_2\,x^2(1+x)^2 + \ldots\ldots.$$

$$A_n = D^{n-1}\left[\frac{1}{x^n}f'(x)\right]_{(x=-1)}$$

Man gewinnt jedoch nichts Neues durch diese Entwickelung; denn setzt man $x = -(1+z)$, wo nun z zwischen o und $\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$ liegt, so ergiebt sich

$$f(-1-z) = A_0 + \frac{1}{1'} A_1(1+z)z + \frac{1}{2'} A_2(1+z)^2 z^2 + \ldots\ldots$$

$$A_n = - D^{n-1}\left[\frac{f'(-1-z)}{(1+z)^n}\right]_{(z=o)}$$

und wenn man $f(-1-z) = F(z)$ also $f'(-1-z) = - F'(z)$ setzt, so kommt man völlig auf die frühere Entwickelung zurück.

II. Machen wir die fernere Annahme $\varphi(x) = x(1-x)$, so können wir zunächst $x = a = o$ setzen, weil $\varphi'(x)$ für diesen Werth verschwindet; weiter ist $\varphi'(x) = 1-2x$, hieraus findet sich $x = \xi = \frac{1}{2}$, $\varphi(\xi) = \frac{1}{4}$ also auch $mod\, \varphi(\xi) = \frac{1}{4}$ und b wird dann mit ξ identisch $= \frac{1}{2}$. Da $\varphi(x)$ wächst von $x = o$ bis $x = \frac{1}{2}$, so giebt diess die Entwickelungsformel:

Wenn die Funktion $f(x)$ innerhalb der Gränzen $x = o$ bis $x = \frac{1}{2}$ in eine Potenzenreihe verwandelbar ist, so gilt innerhalb desselben Intervalles die Gleichung

28) $$f(x) = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 x(1-x) + \frac{1}{2'} A_2 x^2(1-x)^2 + \ldots$$

worin die Koeffizienten A mittelst der Formeln bestimmt werden:

29) $$A_0 = f(o)$$

$$A_n = D^{n-1}\left[\frac{f'(x)}{(1-x)^n}\right]_{(x=o)}.$$

Führt man die angedeutete Differenziation aus, so ist auch

30) $$A_n = f^{(n)}(o)$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1} f^{(n-1)}(o) + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2} f^{(n-2)}(o) + \ldots\ldots$$

Man kann gerade bei der Gleichung 28. sehr leicht *a posteriori* den Nachweis liefern, dass sie über $x = \frac{1}{2}$ hinaus entschieden unrichtig wird. Die Funktionen $x(1-x)$ bleibt nämlich dieselbe, wenn man erst $x = \frac{1}{2} - z$ und dann $x = \frac{1}{2} + z$ setzt; es müsste also auch die linke Seite der Gleichung 28. dieselbe Eigenschaft besitzen, d. h. $f(\frac{1}{2} - z) = f(\frac{1}{2} + z)$ sein, was bei der Willkührlichkeit der Funktion f eine Absurdität ist.

Die Theoreme 25. und 28. lassen sich übrigens in einem einzigen Satz zusammenfassen; verwandelt man nämlich nach dem ersten eine Funktion $F(x)$ in eine Reihe von der Form

$$A_0 + \frac{1}{1'} A_1 \ x(1+x) + \frac{1}{2'} A_2 x^2 (1+x)^2 + \ldots$$

und nach dem zweiten eine Funktion $f(x) = F(-x)$ in eine Reihe von der Form

$$B_0 + \frac{1}{1'} B_1 \, x(1-x) + \frac{1}{2'} B_2 \, x^2 (1-x)^2 + \ldots$$

so findet man $B_n = (-1)^n A_n$ und erhält so die Gleichungen

$$F(x) = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 \, x(1+x) + \frac{1}{2'} A_2 x (1+x)^2 + \ldots$$

$$F(-x) = A_0 - \frac{1}{1'} A_1 \, x(1-x) + \frac{1}{2'} A_2 \, x(1-x)^2 - \ldots\ldots$$

von welchen die erste von $x = o$ bis $x = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)$ und die zweite von $x = o$ bis $x = \frac{1}{2}$ gilt. Da nun die zweite Gleichung aus der ersten entspringt, wenn x negativ genommen wird, so haben wir jetzt das Theorem:

Lässt sich die Funktion $F(x)$ innerhalb der Gränzen

$$\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1) > x > -\frac{1}{2}$$

in eine Potenzenreihe verwandeln, so ist unter derselben Beschränkung

$$F(x) = A_0 + \frac{1}{1}A_1 x(1+x) + \frac{1}{2}A_2 x^2(1+x)^2 + \ldots$$

$$A_0 = F(o), \quad A_n = D^{n-1}\left[\frac{F'(x)}{(1+x)^n}\right]_{(x=o)}$$

Beispiele hierzu wird man sich leicht in beliebiger Menge verschaffen können, da die Koeffizienten hier fast immer sehr leicht entwickelbar sind.

§. 4.

Die Spezialisirungen $\varphi(x) = x : (1 \pm x)$.

I. Nehmen wir zuerst

$$\varphi(x) = \frac{x}{1+x}, \quad a = o,$$

so wird $\varphi'(x) = 1 : (1+x)^2$ und wir kommen daher auf einen der am Ende von §. 1. bemerkten Ausnahmefälle; versuchen wir nämlich die in Beziehung auf $t = \frac{x}{1+x}$ als unabhängige Variable genommenen Differenzialquotienten von $f(x)$ oder $F(t)$ zu entwickeln, so ist zufolge der Formeln 7., 8. etc.

31) $$F'(t) = f'(x)\,(1+x)^2$$

32) $$F''(t) = f''(x)\,(1+x)^4 + 2f'(x)\,(1+x)^3$$

u. s. w.

wo man gleich übersieht, dass der Eintritt einer Diskontinuität nur

von der Natur des $f(x)$ und seiner Differenzialquotienten abhängt. Der kürzeste Weg, der hier zur Kenntniss der Gränzen von x führt, besteht darin, dass man

$$33)\qquad \frac{x}{1+x}, \quad \text{mithin } x = \frac{t}{1-t}$$

setzt und in jedem speziellen Falle ausmittelt, unter welchen Bedingungen die Gleichung

$$34)\qquad f\left(\frac{t}{1-t}\right) = A_0 + \frac{1}{1'}A_1 t + \frac{1}{2'}A_2 t^2 + \frac{1}{3'}A_3 t^3 + \ldots\ldots$$

gültig bleibt und nachher die für t gewonnenen Gränzen mittelst der Substitution $t = x : (1 + x)$ auf x überträgt. · Unter den so gefundenen Determinationen gilt dann die Formel

$$35)\qquad f(x) = A_0 + \frac{1}{1'}A_1\left(\frac{x}{1+x}\right) + \frac{1}{2'}A_2\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \ldots\ldots$$

$$36)\qquad A_0 = f(o)\ , \quad A_n = D^{n-1}\left[(1+x)^n f'(x)\right]_{(x=o)}$$

wobei man für A_n auch schreiben kann

$$37)\qquad A_n = f^{(n)}(o) + (n-1).n_1 f^{(n-1)}(o) + (n-1)(n-2).n_2 f^{(n-2)}(o)$$
$$+ (n-1)(n-2)(n-3).n_3 f^{(n-3)}(o) + \ldots.$$

Die speziellen Fälle $f(x) = (1+x)^\mu$ und $f(x) = l(1+x)$ sind sehr bekannt; man findet, dass die Gleichung 34. für jedes ächt gebrochene t gilt und dass mithin dem x der Spielraum von $x = o$ bis $x = \infty$ offen steht, weil $\varphi(x)$ $x : (1+x)$ während dieses Intervalles zunimmt und erst für $x = \infty$ den Gränzwerth 1 erlangt, welcher dem $t = x : (1+x)$ auferlegt war. Um ein weiteres, nicht so gewöhnliches Beispiel zu haben, sei $f(x) = Arctan\,x$; es handelt sich dann zunächst um die Gültigkeit der Gleichung 34.

$$38)\qquad Arctan\,\frac{t}{1-t} = A_0 + \frac{1}{1'}A_1\,t + \frac{1}{2'}A_2 t^2 + \ldots.$$

Hier wird die Funktion linker Hand diskontinuirlich an der Stelle $t = 1$; denn setzt man erst $t = 1 - \delta$ und nachher $t = 1 + \varepsilon$, worin δ und ε zwei bis zur Null abnehmende positive Zahlen sind, so geht im ersten Falle die Funktion über in

$$Arctan\,\frac{1-\delta}{\delta} = Arctan(+\infty) = +\frac{\pi}{2}$$

dagegen giebt sie bei der zweiten Substitution

$$Arctan\,\frac{1+\varepsilon}{-\varepsilon} = Arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

d. h. an der Stelle $t = 1$ springt die Funktion von $+\frac{\pi}{2}$ nach $-\frac{\pi}{2}$ über. Es muss daher $t < 1$ sein, wenn die Entwickelung 38. gelten soll. Man hat nun weiter

$$D\,Arctan\,\frac{t}{1-t} = \frac{1}{(1-t)^2 + t^2} = \frac{1}{1-2t+2t^2}$$

$$D^2\,Arctan\,\frac{t}{1-t} = \frac{2-4t}{(1-2t+2t^2)^2}$$

u. s. w.

Auch in diesen Differenzialquotienten kann eine Unterbrechung der Kontinuität eintreten, wenn nämlich $1 - 2t + 2t^2 = 0$ wird, woraus folgt

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{-1}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

es muss also $mod\,t < \frac{1}{\sqrt{2}}$, oder wenn wir uns auf reelle t

beschränken $t < \frac{1}{\sqrt{2}}$ d. i. $t < \frac{1}{2}\sqrt{2}$ sein. Die beiden so gefundenen Bedingungen $t < 1$ und $t < \frac{1}{2}\sqrt{2}$ sind aber nur dann gleichzeitig erfüllt, wenn man die letztere Bedingung als die engere beibehält und so gilt dann die Gleichung für $\frac{1}{2}\sqrt{2} > t \geqq o$. Für $t = x : (1 + x)$ wird hieraus

$$Arctan\, x = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 \left(\frac{x}{1+x}\right) + \frac{1}{2'} A_2 \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} > \frac{x}{1+x} \geqq 0 \text{ d. i. } \frac{1}{2}(\sqrt{2}+1) > x \geqq 0$$

Die Koeffizientenbestimmung geschieht leicht nach Nr. 36., nämlich

$$A_0 = 0,\ A_n = D^{n-1}\left[\frac{(1+x)^n}{1+x^2}\right]_{(x=o)}$$

Verwandelt man hier den Quotienten $(1 + x)^n : (1 + x^2)$ in eine nach Potenzen von x fortgehende Reihe (was für $x < 1$ erlaubt ist), so findet man ohne Mühe

$$A_n = (n-1)' \,[n_1 - n_3 + n_5 - \ldots.]$$

$$= (n-1)' \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{\left(\cos \frac{\pi}{4}\right)^n} = (n-1)'\, 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}$$

Man findet jetzt, indem man $n = 1, 2, 3, \ldots$ setzt

39)
$$Arctan\, x = \frac{x}{1+x}$$

$$+ \frac{2^1}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 - \frac{2^2}{5}\left(\frac{x}{1+x}\right)^5 - \frac{2^3}{7}\left(\frac{x}{1+x}\right)^7 + \ldots.$$

$$+ \frac{2^1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 - \frac{2^3}{6}\left(\frac{x}{1+x}\right)^6 + \frac{2^5}{10}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{10} - \ldots.$$

wobei in der ersten Reihe das Vorzeichen von Paar zu Paar in der zweiten von Glied zu Glied wechselt; die Gültigkeitsbedingung ist

$$\text{40)} \qquad \frac{1}{2}(\sqrt{2}+1) > x \geqq 0.$$

Auch hier kann man sich leicht *a posteriori* von der Richtigkeit dieser Determination überzeugen; in der ersten Reihe von Nr. 49. nähert sich der Quotient zweier benachbarten Glieder, seinem absoluten Werthe nach, der Gränze

$$2\left(\frac{x}{1+x}\right)^2$$

und in der zweiten Reihe der Gränze

$$2^2\left(\frac{x}{1+x}\right)^4$$

Damit nun die Reihen konvergiren, ist nothwendig, dass gleichzeitig

$$2\left\{\frac{x}{1+x}\right\}^2 < 1 \text{ und } 2^2\left\{\frac{x}{1+x}\right\}^4 < 1$$

sei, woraus man wieder $x < \frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)$ findet.

II. Auf ähnliche Weise liesse sich die Entwickelung von $f(x)$ für den Fall $\varphi(x)$ $1 = x : (1-x)$ bewerkstelligen, man gelangt aber kürzer dazu, wenn man in der analog zu Nr. 35. gebildeten Gleichung

$$F(z) = A_0 + \frac{1}{1'}A_1\left\{\frac{z}{1+z}\right\} + \frac{1}{2'}A_2\left\{\frac{z}{1+z}\right\}^2 + \dots$$

$x : (1-2x)$ an die Stelle von z treten lässt, wodurch sie in

$$F\left\{\frac{x}{1-2x}\right\} = A_0 + \frac{1}{1'}A_1\left\{\frac{x}{1-x}\right\} + \frac{1}{2'}A_2\left\{\frac{x}{1-x}\right\}^2 + \dots$$

übergeht; die letztere Gleichung gilt nun

$$\text{von } \frac{x}{1-2x} = o \text{ bis } \frac{x}{1-2x} = b$$

$$\text{d. h. von } x = o \qquad \text{bis } x = \frac{b}{2b+1}$$

wenn die erste Gleichung von $z = o$ bis $z = b$ richtig war. Schreiben wir im ersten Falle f für F und im zweiten $f(x)$ für $F\left\{\frac{x}{1-2x}\right\}$, so ergiebt sich der Satz:

Wenn die Reihenentwickelung

41) $$f(x) = A_0 + \frac{1}{1}, A_1 \left\{\frac{x}{1+x}\right\} + \frac{1}{2}, A_2 \left\{\frac{x}{1+x}\right\}^2 + \ldots$$

von $x = o$ bis $x = b$ gilt, so bleibt die Entwickelung

42) $$f(x) = A_0 + \frac{1}{1}, A_1 \left\{\frac{x}{1-x}\right\} + \frac{1}{2}, A_2 \left\{\frac{x}{1-x}\right\}^2 + \ldots$$

richtig innerhalb der Gränzen $x = o$ bis $x = b : (2b + 1)$.

Dabei ist im letzteren Falle

43) $$A_n = D^{n-1} \left\{(1-x)^n f'(x)\right\}_{(x=o)}$$

$$= f^{(n)}(o) - (n-1) \,.\, n_1 f^{(n-1)}(o) + (n-1)(n-2) \,.\, n_2 f^{(n-2)}(o) - \ldots$$

Man wird übrigens leicht übersehen, dass die Entwickelung von $F(x)$ nach Nr. 31. und von $F(-x)$ nach Nr. 42. auf zwei Resultate führt, welche übereinstimmen, indem das zweite Resultat mit demjenigen identisch wird, was man aus der ersten Gleichung erhält, wenn $-x$ für x gesetzt wird. Man kann daher die Formeln 41. und 42. zusammenfassen und zwar auf folgende Weise:

Wenn die Reihenentwickelung

44) $$F\left\{\frac{t}{1-t}\right\} = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 t + \frac{1}{2'} A_2 t^2 + \ldots$$

innerhalb der Gränzen $\tau > t > -\tau$ gilt, so ist

45) $$F(x) = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 \left\{\frac{x}{1+x}\right\} + \frac{1}{2'} A_2 \left\{\frac{x}{1+x}\right\}^2 + \ldots.$$

$$\frac{\tau}{1-\tau} > x > -\frac{\tau}{1+\tau}$$

und dabei werden die Koeffizienten A nach der Formel 36. oder 37. bestimmt.

§. 5.

Die Spezialisirungen $\varphi(x) = x(1+x^2)$ und $\varphi(x) = x:(1+x^2)$.

I. Nehmen wir zunächst $\varphi(x) = x(1+x^2)$, so wird $\varphi'(x) = 1 + 3x^2$, aus der Gleichung $\varphi'(x) = 0$ ergeben sich die speziellen Werthe

$$\xi = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{3}}, \quad \xi = -\frac{\sqrt{-1}}{3}$$

und hieraus folgt weiter

$$\varphi(\xi) = \pm \frac{\sqrt{-1}}{3}\left\{1 - \frac{1}{3}\right\} = \pm \frac{2\sqrt{-1}}{3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{3}}\left\{\cos\frac{\pi}{2} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{2}\right\}$$

mithin

$$mod\,\varphi(\xi) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

Die Gleichungen $\varphi(x) = o$ und $\varphi(x) = mod\,\varphi(\xi)$, aus welchen die Gränzwerthe $x = a$ und $x = b$ zu bestimmen sind, werden jetzt

$$x(1+x^2) = o,\quad x(1+x^2) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

und hiervon sind die reellen Wurzeln

$$x = a = o,\quad x = b = 0{,}34401\ \ldots.$$

Da innerhalb dieser Gränzen die Funktion $\varphi(x) = x(1+x^2)$ beständig wächst, so erhalten wir nach den Bestimmungen des §. 1. folgendes Theorem:

> Wenn sich die Funktion $f(x)$ innerhalb der Gränzen $x = 0$ bis $x = 0{,}34401\ldots$ in eine Potenzenreihe verwandeln lässt, so gilt für dasselbe Intervall die Formel

$$46)\qquad f(x) = A_0 + \frac{1}{1}, A_1\, x(1+x^2) + \frac{1}{2}, A_2\, x^2(1+x^2)^2 + \ldots$$

$$47)\qquad A_0 = f(o),\quad A_n = D^{n-1}\left\{\frac{f'(x)}{(1+x^2)^n}\right\}_{(x=o)}$$

Der Koeffizient A_n lässt sich in noch entwickelterer Form angeben, wenn man

$$\frac{1}{(1+x^2)^n} = 1 - \frac{n}{1}\,x^2 + \frac{(n+1)n}{1\,.\,2}\,x^4 - \ldots$$

setzt und darauf die Regel für die Differenziation der Produkte in Anwenduug bringt; man findet ohne Mühe

$$48)\qquad A_n = f^{(n)}(o) - \frac{n(n-1)(n-2)}{1}\,f^{(n-2)}(o)$$
$$+ \frac{(n+1)\,n(n-1)\ldots(n-4)}{1\,.\,2}\,f^{(n-4)}(o)$$
$$- \frac{(n+2)(n+1)\,n(n-1)\ldots(n-6)}{1\,.\,2\,.\,3}\,f^{(n-6)}(o) + \text{etc.}$$

worin das Fortschrittsgesetz klar sein wird.

In dem einfachen Falle $f(x) = Arctan\,x$ kann die Formel 47. unmittelbar benutzt werden; man erhält

49)
$$A_n = D^{n-1}\left\{\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\right\}_{(x=o)}$$

und bei völliger Entwickelung, wenn man gerade und ungerade n unterscheidet, $A_n = o$ für gerade n, dagegen

$$A_n = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{(n+1)(n+2)\dots\left(n+\frac{n-1}{2}\right)}{1\,.\,2\dots\frac{n-1}{2}}\,.\,1\,.\,2\,.\,3\dots(n-1)$$

für ungerade n; setzt man noch $n = 2k+1$, so ist das allgemeine Glied der Reihe 46.

50)
$$\frac{1}{(2k+1)'}A_{2k+1}\,x^{2k+1}(1+x^2)^{2k+1}$$
$$= (-1)^k\frac{(2k+2)(2k+3)\dots(3k+1)}{1\,.\,2\,.\,3\dots k}\,.\,\frac{x^{2k+1}(1+x^2)^{2k+1}}{2k+1}$$

Für $k = o$, d. h. $n = 1$, kann man diese Formel nicht gebrauchen, dann giebt die Formel 47. unmittelbar $A_1 = 1$. Da endlich $Arctan\,x$ innerhalb der Gränzen $x = 0$ bis $x = 0{,}34401\dots$ in eine Potenzenreihe verwandelbar ist, so haben wir unter dieser Determination:

51)
$$Arctan\,x = x(1+x^2) - \frac{4}{1}\frac{x^3(1+x^2)^3}{3} + \frac{6\,.\,7}{1\,.\,2}\frac{x^5(1+x^2)^5}{5}$$
$$- \frac{8\,.\,9\,.\,10}{1\,.\,2\,.\,2}\frac{x^7(1+x^2)^7}{7} + \dots\dots$$

Die Gleichung gilt übrigens auch für negative x, weil beide Seiten gemeinschaftlich die Eigenschaft $f(-x) = -f(x)$ besitzen und daher ist jetzt

$$0{,}34401\dots > x > -0{,}33401$$

das vollständige Intervall der Gültigkeit. Um dies auch *a posteriori* nachzuweisen, bemerken wir, dass vor dem in Nr. 50. verzeichneten Gliede der Reihe das nachstehende

$$(-1)^{k-1}\frac{2k(2k+1)\ldots(3k-2)}{1\,.\,2\ldots(k-1)}\frac{x^{2k-1}(1+x^2)^{2k-1}}{2k-1}$$

vorhergeht; der Quotient beider ist, abgesehen vom Vorzeichen

$$\frac{1}{k}\frac{(3k-1)\,(3k)\,(3k+1)}{(2k)\,(2k+1)}\frac{2k-1}{2k+1}x^2(1+x^2)^2$$

und damit die Reihe konvergire, darf der Gränzwerth hiervon die Einheit nicht übersteigen. Diess giebt die Bedingung

$$\frac{27}{4}x^2(1+x^2)^2 < 1 \text{ oder } x(1+x^2) < \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

woraus man wie früher $x < 0{,}34401\ldots$ findet. Mit Hülfe des Raabe'schen Theoremes, wonach die Reihe u_0, u_1, u_2, u_3 etc. konvergirt, wenn die Ungleichung

$$Lim\left\{n\left[\frac{u_{n-1}}{u_n}-1\right]\right\} > 1$$

statt findet, erkennt man leicht, dass die in Rede stehende Reihe auch noch für $x = 0{,}34401\ldots$ konvergirt, also die Gleichung 51. auch noch an den Gränzen des Intervalles richtig bleibt; darüber hinaus wird sie entschieden unrichtig.

II. Es sei nun zweitens

$$\varphi(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

so hat die Gleichung $\varphi(x) = o$ die beiden reellen Wurzeln $x = o$ und $x = \infty$, wovon wir nur die erste brauchen können, weil sonst das Gültigkeitsintervall für die beabsichtigte Reihenentwickelung ins Unendliche fiele. Die Gleichung $\varphi'(x) = o$ wird jetzt

$$\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = o$$

und diess giebt für $x = \xi$ zwei Werthe $\xi = 1$ und $\xi = \infty$. Diese sind, weil $\varphi(\xi)$ reell ausfällt, zugleich die Werthe von b; da nun $\varphi(x)$ nur von $x = 0$ bis $x = 1$ wächst, nachher aber von $x = 1$ bis $x = \infty$ abnimmt, so müssen wir das Gültigkeitsintervall auf $x = 0$ bis $x = 1$ beschränken. Diess giebt den Satz:

> Wenn die Funktion $f(x)$ innerhalb der Gränzen $x = 0$ bis $x = 1$ in eine Potenzenreihe verwandelbar ist, so gilt unter derselben Determination die Entwickelung

52) $$f(x) = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 \left\{\frac{x}{1+x^2}\right\} + \frac{1}{2'} A_2 \left\{\frac{x}{1+x^2}\right\}^2 + \ldots$$

53) $$A_0 = f(o), \quad A_n = D^{n-1} \left\{(1+x^2)^n f'(x)\right\}_{(x=o)}$$

Weiter entwickelt ist der Koeffizient

54) $$A_n = f^{(n)}(o) + (n-1) n_1 f^{(n-2)}(o)$$
$$+ (n-1)(n-2)(n-3) n_2 f^{(n-4)}(o)$$
$$+ (n-1)(n-2) \ldots (n-5) n_3 f^{(n-6)}(o) + \ldots$$

Will man sich *a posteriori* überzeugen, dass die obige Entwickelung nicht über $x = 1$ hinaus richtig ist, obwohl die Reihe immer noch konvergirt, so setze man einmal $x = z$, das andere Mal $x = \frac{1}{z}$; die Reihe bleibt dann dieselbe und folglich müsste allgemein $f(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ sein. — Für $f(x) = e^{\alpha x}$ hat man z. B. sehr einfach

55) $$A_n = \alpha^n + (n-1) . n_1 \alpha^{n-2} + (n-1)(n-2)(n-3) . n_2 \alpha^{n-4}$$
$$+ (n-1)(n-2) \ldots (n-5) . n_3 \alpha^{n-6} + \ldots$$

und für die so bestimmten Werlhe ist innerhalb der Gränzen $x = 0$ bis $x = 1$

$$56)\quad e^{\alpha x} = 1 + \frac{1}{1'} A_1 \left\{\frac{x}{1+x^2}\right\}^2 + \frac{1}{2'} A_2 \left\{\frac{x}{1+x^2}\right\}^2 + \frac{1}{3'} A_3 \left\{\frac{x}{1+x^2}\right\}^3 + \ldots\ldots$$

§. 6.

Die Spezialisirungen $\varphi(x) = \sin x$ und $\varphi(x) = \cos x$.

I. Die Funktion $\varphi(x) = \sin x$ annullirt sich für unendlich viele Werthe von x, welche unter der Form $a = m\pi$, wo m eine ganze Zahl bedeutet, enthalten sind. Nehmen wir vorerst einfach $m = o$ also $a = o$, so gilt die Reihenentwickelung

$$57)\quad f(x) = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 \sin x + \frac{1}{2'} A_2 \sin^2 x + \frac{1}{3'} A_3 \sin^3 x + \ldots.$$

so lange bis $\sin x$, stets wachsend, sein Maximum erreicht, also bis $x = \frac{\pi}{2}$. Dass in der That über $\frac{\pi}{2}$ hinaus die Gleichung 56. zu bestehen aufhört, erkennt man leicht, wenn für x einmal $\frac{\pi}{2} - z$ und das andere Mal $\frac{\pi}{2} + z$ gesetzt wird, die Reihe behält in beiden Fällen denselben Werth, aber es ist nicht allgemein $f\left[\frac{\pi}{2} + z\right] = f\left[\frac{\pi}{2} - z\right]$. Für die Koeffizientenbestimmung dienen die Formeln:

$$58)\quad A_0 = f(o),\ A_n = D^{n-1} \left\{\left[\frac{x}{\sin x}\right]^n f'(x)\right\}_{(x=o)}$$

wobei die angedeutete Differenziation sich zwar in jedem speziellen Falle ($n = 1, 2, 3 \ldots$) ohne Schwierigkeit ausführen aber durch keine independenten Formeln näher angeben lässt.

Auf ähnliche Weise kann man die Gültigkeit der Reihe 56. für noch andere Intervalle nebst der zugehörigen Koeffizientenbestimmung zeigen, kürzer aber kommt man auf folgendem Wege zum Ziele. In Nr. 57. sei $f(x) = F(k\pi + x)$, wo k eine ganze positive oder negative Zahl und F eine neue Funktion bezeichnet, so gilt nach Nr. 57. für $\frac{\pi}{2} > x \geqq o$ d. h. für

$$k\pi + \frac{\pi}{2} > k\pi + x \geqq k\pi$$

Die Reihenentwickelung

$$59) \quad F(k\pi + x) = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 \sin x + \frac{1}{2'} A_2 \sin^2 x + \ldots\ldots$$

dabei ist nach Nr. 58.

$$A_0 = F(k\pi); \; A_n = D^{n-1} \left\{ \left[\frac{x}{\sin x}\right]^n F'(k\pi + x) \right\}_{(x=o)}$$

Setzen wir nun in den neuen Formeln $k\pi + x = z$, also $x = z - k\pi$, so folgt $\sin x = \cos k\pi \sin z = (-1)^k \sin z$ und

$$F(z) = F(k\pi) + \frac{(-1)^k}{1'} A_1 \sin z + \frac{(-1)^{2k}}{2'} A_2 \sin^2 z + \ldots$$

$$A_n = (-1)^{kn} D^{n-1} \left\{ \left[\frac{z - k\pi}{\sin z}\right]^n F'(z) \right\}_{(z=k\pi)}$$

Hier sei zur Abkürzung

$$C_n = D^{n-1} \left\{ \left[\frac{z - k\pi}{\sin z}\right]^n F'(z) \right\}_{(z=k\pi)}$$

also $A_n = (-1)^{nk} C_n$, so ergiebt sich aus der vorhergehenden Reihe

$$F(z) = F(k\pi) + \frac{1}{1'} C_1 \sin z + \frac{1}{2'} C_2 \sin^2 z + \ldots$$

und sie gilt von $z = k\pi$ an bis $z < k\pi + \frac{\pi}{2}$. Schreiben wir endlich der Symmetrie wegen f, A und x für F, C und z, so gelangen wir zu dem Satze:

Wenn die Funktion $f(x)$ innerhalb der Gränzen $x = k\pi$ bis $x = (k + \frac{1}{2})\pi$, wo k eine ganze Zahl, in eine Potenzenreihe verwandelbar ist, so gilt für dieses Intervall auch die Entwickelung

60) $$f(x) = f(k\pi) + \frac{1}{1'} A_1 \sin x + \frac{1}{2'} A_2 \sin^2 x + \frac{1}{3'} A_3 \sin^3 x + \ldots..$$

deren Koeffizienten nach der Formel

61) $$A_n = D^{n-1} \left\{ \left[\frac{x - k\pi}{\sin x} \right]^n f'(x) \right\}_{(x = k\pi)}$$

zu bestimmen sind.

Eine nicht uninteressante Substitution für $f(x)$ wäre hier z. B. $f(x) = Si(x)$, wobei $Si(x)$ der Integralsinus von x; d. h. die Summe der Reihe

$$\frac{1}{1} \frac{x}{1'} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3'} + \frac{1}{5} \frac{x^5}{5'} - \ldots.$$

bezeichnet. Es wird dann $f'(x) = \frac{\sin x}{x}$ und also

$$Si(x) = Si(k\pi) + \frac{1}{1'} A_1 \sin x + \frac{1}{2'} A_2 \sin^2 x + \ldots.$$

$$(k + \frac{1}{2})\pi > x \geqq k\pi$$

$$A_n = D^{n-1} \left\{ \left[\frac{x - k\pi}{\sin x} \right]^n \frac{\sin x}{x} \right\}_{(x = k\pi)}$$

welche Formeln dazu dienen könnten um aus dem Sinus eines zwischen $k\pi$ und $(k+\frac{1}{2})\pi$ enthaltenen Argumentes unmittelbar den Integralsinus desselben zu berechnen.

II. Die Entwickelung nach Potenzen des Cosinus lässt sich als eine einfache Folge von den so eben aufgestellten Formeln betrachten. Setzen wir nämlich in Nr. 60. $f(x) = F(x+\frac{\pi}{2})$, so ist für $(k+\frac{1}{2})\pi > x \geqq k\pi$

$$F(x+\frac{\pi}{2}) = F\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right) + \frac{1}{1'} A_1 \sin x + \frac{1}{2'} A_2 \sin^2 x + \ldots.$$

$$A_n = D^{n-1} \left\{\left(\frac{x-k\pi}{\sin x}\right)^n F'(x+\frac{\pi}{2})\right\}_{(x=k\pi)}$$

und wenn $x = z - \frac{\pi}{2}$ genommen wird, so ist für $(k+1)\pi > z \geqq (k+\frac{1}{2})\pi$

$$F(z) = F\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right) - \frac{1}{1'} A_1 \cos z + \frac{1}{2'} A_2 \cos^2 z - \ldots$$

$$A_n = (-1)^n D^{n-1} \left\{\left(\frac{z-(k+\frac{1}{2})\pi}{\cos z}\right)^n F'(z)\right\}_{[z=(k+\frac{1}{2})\pi]}$$

Bezeichnen wir zur Abkürzung wie folgt,

$$A'_n = D^{n-1} \left\{\left(\frac{z-(k+\frac{1}{2})\pi}{\cos z}\right)^n F'(z)\right\}_{[z=(k+\frac{1}{2})\pi]}$$

so wird $A_n = (-1)^n A'_n$ und wir haben jetzt nach dem Vorhergehenden

$$F(z) = F\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right) + \frac{1}{1'}A'_1 \cos z + \frac{1}{2'}A'_2 \cos^2 z + \ldots\ldots$$

Der Gleichförmigkeit wegen schreiben wir wieder f und x für F und z, und lassen die Accente an den Koeffizienten weg; so gelangen wir zu dem Satze:

Wenn die Funktion $f(x)$ innerhalb der Gränzen $x = (k+\frac{1}{2})\pi$ bis $x = (k+1)\pi$, wo k eine ganze Zahl, in eine Potenzenreihe verwandelbar ist, so gilt für dieses Intervall auch die Entwickelung

$$f(x) = f\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right) + \frac{1}{1'}A_1 \cos x + \frac{1}{2'}A_2 \cos^2 x + \ldots \tag{62}$$

deren Koeffizienten durch die Formel

$$A_n = D^{n-1}\left\{\left(\frac{x-(k+\frac{1}{2})\pi}{\cos x.}\right)^n f'(x)\right\}_{[x=(k+\frac{1}{2})\pi]} \tag{63}$$

bestimmt werden.

Von dieser Formel liesse sich ähnlich wie vorhin eine Anwendung machen, um aus dem Cosinus eines Argumentes den Integralcosinus desselben Argumentes abzuleiten, wobei unter dem Integralcosinus $[Ci(x)]$ die Summe der Reihe

$$0{,}5772156\ldots + \frac{1}{2}l(x^2) - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2'} + \frac{1}{4}\frac{x^4}{4'} - \ldots$$

verstanden wird; es ist dann $d\,Ci(x) = \frac{\cos x}{x}dx.$

§. 7.

Die Spezialisirung $\varphi(x) = Arctan\, x$.

Der Fall $\varphi(x) = Arctan\, x$ bietet wieder die Eigenthümlichkeit dar, dass

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

eine gebrochene abgebraische Funktion mit konstantem Zähler bildet, so dass also hier die schon berührte Ausnahme von den allgemeinen Regeln statt findet. Wenn nun aber

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{1'} Arctan\, x + \frac{1}{2'} Arc^2 tan\, x + \ldots.$$

sein soll, so folgt umgekehrt für $Arctan\, x = t$

$$f(tan\, t) = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 t + \frac{1}{2'} A_2 t^2 + \ldots\ldots$$

und es ist sehr leicht zu sehen, wie weit diese Entwickelung gelten wird. Es ist nämlich

$$\frac{d f(tan\, t)}{dt} = \frac{f'(tan\, t)}{cos^2 t}$$

$$\frac{d^2 f(tan\, t)}{dt^2} = \frac{f'(tan\, t) \sin 2t + f''(tan\, t)}{cos^4 t}$$

u. s. f.

Die Ausdrücke rechter Hand können nun auf doppelte Weise eine Unterbrechung der Kontinuität erleiden, entweder indem der Nenner verschwindet, oder indem eine der einzelnen Funktionen $f'(tan\, t)$, $f''(tan\, t)$ .... diskontinuirlich wird. Schliessen wir den ersten Fall aus, indem wir $\frac{\pi}{2} > t$ setzen, so bleibt nur noch der zweite Fall übrig; wenn nun t (oder der Modulus von t) das

Intervall von Null bis in die Nachbarschaft von t durchläuft, so verändert sich $tant$, das Argument der Funktionen $f(tant)$, $f'(tant)$, $f''(tant)$ etc., von 0 bis ∞ und daher bleiben diese Funktionen stetig, wenn die Funktionen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ etc. von $x = o$ bis $x = \infty$ oder $mod x = o$ bis $mod x = \infty$ ebenfalls kontinuirlich sind. Da unter der letzteren Bedingung $f(x)$ in eine Potenzenreihe verwandelbar ist, so haben wir zunächst den Satz: die Reihe 64. gilt für $\frac{\pi}{2} > t \geqq o$, sobald $f(x)$ innerhalb der Gränzen $x = o$ bis $x = \infty$ einer Potenzenreihe gleich ist. Durch Rückkehr zum Früheren ergiebt sich daraus weiter das Theorem:

> Wenn die Funktion $f(x)$ für jedes positive x einer Potenzenreihe gleichgilt, so ist ebenfalls für jedes positive x

64) $$f(x) = f(o) + \frac{1}{1} A_1\, Arctan\, x + \frac{1}{2} A_2\, Arc^2 tan\, x + \ldots$$

> worin die Koeffizienten mittelst der Formel

65) $$A_n = D^{n-1} \left\{ \left(\frac{x}{Arctan\, x} \right)^n f'(x) \right\}_{(x=o)}$$

> zu bestimmen sind.

Es versteht sich von selbst, dass die Gültigkeit der Entwickelung 64. in demselben Maasse beschränkt wird, als diess mit der Verwandlung von $f(x)$ in eine Potenzenreihe der Fall ist; gilt z. B. die letztere Verwandlung nur etwa für $\alpha > x \geqq o$, so unterliegt auch die Formel 64. derselben Beschränkung.

Wollte man die Koeffizientenbestimmung nach Formel 65. ausführen, so würde man immer auf sehr verwickelte Differenziationen stossen und es ist daher nicht überflüssig, einen andern Weg zur Entwickelung derselben anzudeuten. Da die Funktion $f(x)$ der Voraussetzung nach in eine Potenzenreihe verwandelbar sein muss, so haben wir

66) $f(x) = a_0 + \frac{1}{1'} a_1 x + \frac{1}{2'} a_2 x^2 + \frac{1}{3'} a_3 x^3 + \ldots\ldots$

und bekanntlich $a_0 = f(o)$, $a_1 = f'(o)$, $a_2 = f''(o)$ u. s. w.

Nun ist weiter nach einer bekannten Formel für $\frac{\pi}{2} > u > -\frac{\pi}{2}$

$$tan\,u = u + \frac{1}{3} u^3 + \frac{2}{15} u^5 + \frac{17}{315} u^7 + \frac{62}{2835} u^9 + \ldots\ldots$$

oder für $u = Arctan\,x$

67) $$x = Arctan\,x + \frac{1}{3} Arc^3 tan\,x + \frac{2}{15} Arc^5 tan\,x + \frac{17}{315} Arc^7 tan\,x + \frac{62}{2835} Arc^9 tan\,x + \ldots\ldots$$

Hieraus ergiebt sich durch beiderseitige Differenziation, Multiplikation mit $1 + x^2$ und nachherige Subtraktion der Einheit

68) $$x^2 = Arc^2 tan\,x + \frac{2}{3} Arc^4 tan\,x + \frac{17}{45} Arc^6 tan\,x + \frac{62}{315} Arc^8 tan\,x + \ldots\ldots$$

Weitere Differenziation, Division mit 2 und Multiplikation mit $1 + x^2$ giebt

$$x + x^3 = Arctan\,x + \frac{4}{3} Arc^3 tan\,x + \frac{17}{15} Arc^5 tan\,x + \frac{248}{315} Arc^7 tan\,x + \ldots\ldots$$

und durch Subtraktion von Nr. 67. wird hieraus

69) $$x^3 = Arc^3 tan\,x + Arc^5 tan\,x + \frac{231}{315} Arc^7 tan\,x + \ldots$$

Fernere Differenziation, Division mit 3, Multiplikation mit $1 + x^2$ und Subtraktion von Nr. 68. giebt

$$70) \qquad x^4 = Arc^4 tan\, x + \frac{4}{3} Arc^6\, tan\, x + \ldots\ldots$$

Man übersieht auf der Stelle den Fortgang dieser ganz einförmigen Rechnung; substituirt man die für x, x^2, x^3, x^4 etc. gefundenen Reihen in die Gleichung 66,, so wird jetzt

$$f(x) = a_0 + \frac{1}{1'} a_1 \left\{ Arctan\, x + \frac{1}{3} Arc^3\, tan\, x + \frac{2}{15} Arc^5 tan\, x + \ldots \right\}$$

$$+ \frac{1}{1'} a_2 \left\{ Arc^2 tan\, x + \frac{2}{3} Arc^4 tan x + \frac{17}{45} Arc^6\, tan\, x + \ldots \right\}$$

$$+ \frac{1}{3'} a_3 \left\{ Arc^3\, tan\, x + Arc^5\, tan\, x + \ldots\ldots\ldots \right\}$$

$$+ \frac{1}{4'} a_4 \left\{ Arc^4\, tan\, x + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right\}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Sobald man hier Alles nach Potenzen von *Arctan x* geordnet hat, ist es leicht, eine Vergleichung mit Nr. 64. vorzunehmen; die hieraus entspringenden Werthe von A_0, A_1, A_2 etc. sind:

$$A_0 = a_0,\; A_1 = a_1,\; A_2 = a_2$$
$$A_3 = 2a_1 + a_3$$
$$A_4 = 8a_2 + a_4$$
$$A_5 = 16a_1 + 20a_3 + a_5$$
$$A_6 = 136a_2 + 40a_4 + a_6$$
$$A_7 = 272a_1 + 616a_3 + 70a_5 + a_7$$
$$A_8 = 3968a_2 + 2016a_4 + 112a_6 + a_8$$
$$A_9 = 7936a_1 + 28160a_3 + 5376a_5 + 168a_7 + a_9$$
$$A_{10} = 176896a_2 + 106720a_4 + 10528a_6 + 240a_8 + a_{10}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nehmen wir beispielweis $f(x) = li(e^x)$ d. h. gleich

$$0{,}5772156 + \frac{1}{2}\, l(x^2) + \frac{1}{1}\,\frac{x}{1'} + \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2'} + \frac{1}{3}\,\frac{x^3}{3'} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

welche Reihe immer konvergirt, so findet sich für jedes positive x

$$li(e^x) = 0{,}5772156 + \frac{1}{2}\, l(x^2)$$

$$+ \frac{1}{1}\,\frac{Arc\tan x}{1'} + \frac{1}{2}\,\frac{Arc^2 \tan x}{2'}$$

$$+ \frac{7}{1.3}\,\frac{Arc^3 \tan x}{3'} + \frac{1}{2.4}\,\frac{Arc^4 \tan x}{4'}$$

$$+ \frac{343}{1.3.5}\,\frac{Arc^5 \tan x}{5'} + \frac{3752}{2.4.6}\,\frac{Arc^6 \tan x}{6'}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Für $li(e^{-x})$ findet man eine Reihe, welche aus denselben Gliedern besteht, nur dass die Glieder ungerader Nummer negativ werden; man kann daher auch sagen, dass die vorstehende Entwickelung für jedes reelle x Gültigkeit besitze.

Eben so leicht würde es sein, Reihen für $Ci(x)$, $Si(x)$ und transscendente Funktionen abzuleiten; jene enthält nur gerade, diese nur ungerade Potenzen von $Arc\tan x$; beide gelten für jeden reellen Werth von x.

§. 8.

Die Spezialisirung $\varphi(x) = xe^{-x}$.

Wir haben bisher meistentheils solche Spezialisirungen von $\varphi(x)$ betrachtet, bei denen eine Umkehrung der Funktion $\varphi(x)$ möglich war, d. h. bei denen aus der Gleichung $\varphi(x) = t$ die umgekehrte Gleichung etwa $x = \psi(t)$ abgeleitet werden konnte; in allen diesen Fällen liesse sich die Entwickelung

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 \varphi(x)^2 + \frac{1}{2'} A_2 \varphi(x)^2 + \frac{1}{3'} A_3 \varphi(x)^3 + \dots\dots$$

auf die folgende

$$f[\psi(t)] = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 t + \frac{1}{2'} A_2 t^2 + \frac{1}{3'} A_3 t^3 + \dots$$

also im Grunde auf das Theorem von *Mac Laurin* zurückführen, wiewohl die höheren Differenzialquotienten von $f[\psi(t)]$ in allgemeinen Formeln nicht leicht entwickelbar sein würden. Wenn dagegen die Funktion $\varphi(x)$ der Art ist, dass man ihre Umkehrung nicht so unmittelbar angeben kann; so würde jene Reduktion auf den Mac Laurin'schen Satz unmöglich werden und gerade in der Bewältigung, selbst dieser Fälle, liegt die starke Seite der Bürmann'schen Formel. Eine derartige Spezialisirung von $\varphi(x)$ ist nun die obengenannte $\varphi(x) = xe^{-x}$. Diese Funktion verschwindet für $x = o$ und für $x = \infty$, wir können aber nur den ersten Werth, also $a = o$, gebrauchen, weil sonst das Gültigkeitsintervall unserer Entwickelung ins Unendliche fiele. Ferner erreicht die Funktion xe^{-x} für $x = 1$ ihr reelles Maximum und es ist daher $b = 1$. Diess giebt folgenden Satz:

> Wenn die Funktion $f(x)$ innerhalb der Gränzen $x = 0$ bis $x = 1$ in eine Potenzenreihe verwandelbar ist, so gilt für dasselbe Intervall die Entwickelung

71) $$f(x) = f(o) + \frac{1}{1'} A_1 xe^{-x} + \frac{1}{2'} A_2 x^2 e^{-2x} + \frac{1}{3'} A_3 x^3 e^{-3x} + \dots$$

> wobei die Koeffizienten nach der Formel

72) $$A_n = D^{n-1} \left\{ e^{nx} f'(x) \right\}_{(x=o)}$$

$$= f^{(n)}(o) + (n-1)_1 . n f^{(n-1)}(o) + (n-1)_2 n^2 f^{(n-2)}(o) + \dots$$

> zu bestimmen sind.

Nimmt man beispielsweise $f'x) = x$, so findet sich

$$73) \qquad x = \frac{1^0}{1'} xe^{-x} + \frac{2^1}{2'} (xe^{-x})^2 + \frac{3^2}{3'} (xe^{-x})^3 + \ldots.$$

und man würde leicht genug ähnliche Beispiele dazu stellen können. Wichtiger als diess ist die Bemerkung, dass die vorstehende Formel selbst zur Umkehrung der Gleichung $xe^{-x} = t$ benutzt werden kann. Bezeichnen wir nämlich die umgekehrte Funktion mit $\psi(t)$, also $x = \psi(t)$, so folgt aus der letzten Formel

$$74) \qquad \psi(t) = \frac{1^0}{1'} t + \frac{2^1}{2'} t^2 + \frac{3^2}{3'} t^3 + \ldots..$$

und diess gilt von $t = o$ bis $t = \frac{1}{e}$, weil xe^{-x} für $x = 1$ seinen grössten Werth $\frac{1}{e}$ erreicht. Zu beachten ist übrigens hierbei, dass man mittelst der obigen Formel nur die eine Umkehrung der Gleichung $xe^{-x} = t$ erhält, obschon zwei solcher Umkehrungen existiren. Denken wir uns nämlich der Anschaulichkeit wegen die Sache geometrisch und zwar $t = xe^{-x}$ als Gleichung einer ebenen Kurve, so geht dieselbe durch den Anfangspunkt der Koordinaten, erreicht bei $x = 1$ ihr Maximum $\frac{1}{e}$ und nähert sich von da ab der Abscissenachse als Asymptote. Zu jeder individuellen Ordinate t (natürlich $t < \frac{1}{e}$) gehören demnach zwei Abscissen, von denen die eine in dem Intervalle 0 bis 1, die andere in dem Intervalle 1 bis ∞ enthalten ist, und daher besitzt die Gleichung $xe^{-x} = t$, wenn man t als gegeben und x als gesucht ansieht, zwei reelle Wurzeln, d. h. es giebt zwei Umkehrungen der Gleichung. Die Formel 74. liefert von diesen nur die kleinere, weil darin $x = \psi(t)$ auf das Intervall 0 bis 1 beschränkt ist. Genaueres über die Umkehrungen der Funktionen werden wir in einem der nächsten Paragraphen geben.

§. 9.

Verallgemeinerung der Entwickelungsformel.

Um eine Entwickelung von der Form

$$75)\quad f(x) = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 \psi(x) + \frac{1}{2'} A_2 \psi(x)^2 + \frac{1}{3'} A_3 \psi(x)^3 + \ .$$

bewerkstelligen zu können, musste bisher immer vorausgesetzt werden, dass es wenigstens einen endlichen Werth a von x gebe, welcher $\psi(x)$ zum Verschwinden bringt. Dieser Bedingung genügen aber nicht alle Funktionen, wie z. B. schon e^x für keinen endlichen Werth von x verschwindet; man kann sich aber in diesem Falle sehr leicht helfen, indem man a willkührlich annimmt und in der Gleichung 75. $\psi(x) = \varphi(x) - \varphi(a)$ setzt, welcher Ausdruck für $x = a$ jederzeit in Null übergeht. Man hat dann

$$76)\quad f(x) = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 [\varphi(x) - \varphi(a)] + \frac{1}{2'} A_2 [\varphi(x) - \varphi(x)]^2$$
$$+ \frac{1}{3'} A_3 [\varphi(x) - \varphi(a)]^3 + \ldots$$

und darin ist nach den früheren Angaben, wenn man sich $\varphi(x) - \varphi(a)$ an die Stelle von $\varphi(x)$ gesetzt denkt

$$77)\quad A_n = D^{n-1} \left\{ \left(\frac{x-a}{\varphi(x) - \varphi(a)} \right)^n f'(x) \right\}_{(x=a)} .$$

Die Bedingungen für die Gültigkeit der Entwickelung 76. finden sich auf folgendem Wege: man löse zunächst die Gleichung $\varphi'(x) = 0$ auf und nenne ξ ihre Wurzeln, bilde darauf die zweite Gleichung

$$78)\quad \varphi(x) - \varphi(a) = mod \left\{ \varphi(\xi) - \varphi(a) \right\}$$

und bezeichne ihre Wurzeln durch $x = b$; die Formel 76. gilt dann für $b > x \geqq a$ vorausgesetzt, dass $\varphi(x)$ während dieses

Intervalles zunimmt, und dass $f(x)$, sowie $\varphi(x)$ für $b > x \geqq a$ in Potenzenreihen verwandelbar sein würden.

Es liegt bei der Betrachtung der Gleichung 76. der Gedanke sehr nahe, sich *a posteriori* von ihrer Richtigkeit zu überzeugen, indem man beide Seiten derselben nach Potenzen von $x - a$ entwickelt und darauf die Koeffizienten gleicher Potenzen zusammen hält. Wir wollen diesen Gedanken noch etwas ausführen, weil er zuletzt ein schlagendes Beispiel liefert, mit welcher Vorsicht unendliche Reihen und besonders doppelte oder mehrfache Reihen behandelt werden müssen, wenn man nicht auf die widersinnigsten Resultate kommen will.

Nach dem Theoreme von *Taylor* ist bekanntlich

$$\textbf{79)} \quad \varphi(x) = \varphi(a) + \frac{\varphi'(a)}{1}(x-a) + \frac{\varphi''(a)}{2}(x-a) + \ldots\ldots$$

oder, wenn wir die Buchstaben α_1, α_2, α_3 etc. als Abkürzungen für die Koeffizienten benutzen

$$\textbf{80)} \quad \varphi(x) - \varphi(a) = \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \alpha_3(x-a)^3 + \ldots$$

Denken wir uns beide Seiten dieser Gleichung der Reihe nach auf die zweite, dritte Potenz u. s. w. erhoben, so resultiren Gleichungen von den Formen

$$\textbf{81)} \quad [\varphi(x) - \varphi(a)]^2 = \beta_2(x-a)^2 + \beta_3(x-a)^3 + \beta_4(x-a)^4 + \ldots$$

$$\textbf{82)} \quad [\varphi(x) - \varphi(a)]^3 = \gamma_3(x-a)^3 + \gamma_4(x-a)^4 + \gamma_5(x-a)^5 + \ldots$$

u. s. w.

worin es auf die Werthe der mit β, γ u. s. f. bezeichneten Koeffizienten nicht näher ankommt; genug für uns, dass sich diese Werthe bei wirklicher Potenzirung von selbst ergeben würden. Multipliziren wir ferner die Gleichungen 80., 81., 82. etc., mit den

vor der Hand noch unbestimmten Koeffizienten C_1, C_2, C_3 etc., so ist durch Addition bei gehöriger Ordnung nach Potenzen von $x - a$

$$C_1[\varphi(x) - \varphi(a)] + C_2[\varphi(x) - \varphi(a)]^2 + C_3[\varphi(x) - \varphi(a)]^3 + \ldots$$

$$= \alpha_1 C_1 (x - a)$$

$$+ \left\{\alpha_2 C_1 + \beta_2 C_2\right\} (x - a)^2$$

$$+ \left\{\alpha_3 C_1 + \beta_3 C_2 + \gamma_3 C_3\right\} (x - a)^3$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Hier könnte man die noch unbestimmten Koeffizienten C_1, C_2, C_3 etc. so wählen, dass die Gleichungen

$$\alpha_1 C_1 = \frac{f'(a)}{1'}$$

$$\alpha_2 C_1 + \beta_2 C_2 + \frac{f''(a)}{3'}$$

$$\alpha_3 C_1 + \beta_3 C_2 + \gamma_3 C_3 = \frac{f'''(a)}{3'}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

erfüllt wären, in denen f eine willkührlich angenommene Funktion bedeutet; und in der That würde es keine Schwierigkeiten haben die Werthe von C_1, C_2, C_3 etc. der Reihe nach zu bestimmen. Jetzt wird nun

$$C_1[\varphi(x) - \varphi(a)] + C_2[\varphi(x) - \varphi(a)]^2 + C_3[\varphi(x) - \varphi(a)]^3 + \ldots$$

$$= \frac{f'(a)}{1'}(x - a) + \frac{f''(a)}{2'}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3'}(x - a)^3 + \ldots$$

$$= f(x) - f(a)$$

indem man wiederum das Taylor'sche Theorem angewendet hat; demnach ist zuletzt

$$83)\quad f(x) = f(a) + C_1[\varphi(x) - \varphi(a)] + C_2[\varphi(x) - \varphi(a)]^2 + C_3[\varphi(x) - \varphi(a)]^3 + \ldots$$

und hiermit wäre die Entwickelung nach dem Schema von Nr. 76. geleistet. — So elegant diess Alles auch aussehen mag, so ist doch die ganze Ableitung höchst ungenügend und führt selbst in dem glücklichsten Falle, wenn nämlich die in Gebrauch genommenen zwei Reihen

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots$$

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \frac{\varphi'(a)}{1}(x-a) + \frac{\varphi''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots$$

zu gleicher Zeit für alle möglichen x konvergiren, immer noch auf absurde Resultate, indem man durch die Herleitung zu dem Glauben verleitet wird, es sei die Formel 83. ebenfalls für alle möglichen x richtig. Setzen wir z. B. voraus, dass $\varphi(x)$ für $x = \mu$ ein Maximum oder Minimum erreichte, so giebt es eine unendliche Menge von Werthen x_1 und x_2 der Art, dass immer $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ ist, wobei $x_1 < \mu$ und $x_2 > \mu$ sein muss; nimmt man jetzt in der Formel erst dann $x = x_1$ und dann $x = x_2$, so wäre $f(x_1) = f(x_2)$, was deswegen völlig absurd ist, weil x_1 und x_2 nur mit φ aber gar nicht mit f zusammenhängen. So würde man z. B. für $f(x) = e^x$ und $\varphi(x) = \sin x$ die Entwickelung

$$e^x = 1 + \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{7}{6}\sin^3 x + \frac{5}{24}\sin^4 x + \ldots\ldots$$

erhalten, welche trotzdem, dass die Reihen für e^x und $\sin x$ immer konvergiren, nicht allgemein richtig sein kann, indem sie für $x = u$ und $x = \pi - u$ auf das Resultat $e^u = e^{\pi - u}$ führen würde.

Der Grund dieser Erscheinung ist leicht zu entdecken, sobald man die vorige Entwickelung mit der Sorgfalt wiederholt, jede

Reihe als endliche zu nehmen und ihr den zugehörigen Rest beizusetzen. Genauer ist also, wenn wir die Reste mit $\overset{I}{R}_n$, $\overset{II}{R}_n$, $\overset{III}{R}_n$, ... $\overset{n}{R}_n$ bezeichnen,

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \alpha_3(x-a)^3 + \dots\dots$$
$$\dots + \alpha_n(x-a)^n + \overset{I}{R}_n$$

$$[\varphi(x) - \varphi(a)]^2 = \beta_2(x-a)^2 + \beta_3(x-a)^3 + \beta_4(x-a)^4 + \dots$$
$$\dots + \beta_n(x-a)^n + \overset{II}{R}_n$$

$$[\varphi(x) - \varphi(a)]^3 = \gamma_3(x-a)^3 + \gamma_4(x-a)^4 + \gamma_5(x-a)^5 + \dots$$
$$\dots + \gamma_n(x-a)_n + \overset{III}{R}_n$$

. . . .

$$[\varphi(x) - \varphi(a)]^n = \varkappa_n(x-a)^n + \overset{n}{R}_n$$

und hieraus ergiebt sich bei derselben Koeffizientenbestimmung wie vorhin

$$C_1[\varphi(x) - \varphi(a)] + C_2[\varphi(x) - \varphi(a)]^2 + C_3[\varphi(x) - \varphi(a)]^3 + \dots$$
$$\dots + C_n[\varphi(x) - \varphi(a)]^n$$
$$= \frac{f'(a)}{1'}(x-a) + \frac{f''(a)}{2'}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3'}(x-a)^3 + \dots$$
$$\dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n'}(x-a)^n$$

$$+ C_1\overset{I}{R}_n + C_2\overset{II}{R}_n + C_3\overset{III}{R}_n + \dots + C_n\overset{n}{R}_n$$

Bezeichnen wir nun r_n den Rest bei der Entwickelung von $f(x)$ nach Potenzen von $x - a$, setzen also

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1'}(x-a) + \frac{f''(a)}{2'}(x-a)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n'}(x-a)^n + r_n$$

und setzen wir ferner zur Abkürzung

$$s_n = C_1 \overset{I}{R}_n + C_2 \overset{II}{R}_n + \dots + C_n \overset{n}{R}_n$$

so geht jetzt die obige Gleichung in die folgende über

$$C_1[\varphi(x) - \varphi(a)] \; C_2[\varphi(x) - \varphi(a)]^2 + C_3[\varphi(x) - \varphi(a)]^3 + \dots.$$

$$\dots + C_n[\varphi(x) - \varphi(a)]^n$$

$$= f(x) - f(a) - r_n + s_n$$

oder es ist endlich

$$f(x) - r_n + s_n = f(a) + C_1[\varphi(x) - \varphi(a)] + C_2[\varphi(x) - \varphi(a)]^2 + \dots$$

$$\dots + C_n[\varphi(x) - \varphi(a)]^n$$

Soll nun diese unter allen Umständen richtige Gleichung mit der in Nr. 83. verzeichneten Entwickelung zusammenfallen, so muss für unendlich wachsende n

$$Lim(r_n - s_n) = 0$$

sein, was nur dann möglich ist, wenn einzeln die Beziehungen

$$Lim\, r_n = 0, \; Lim\, s_n = 0$$

statt finden, weil r_n nur von f, s_n aber auch von φ abhängt und sich folglich r_n und s_n nicht gegenseitig aufheben können. Diese Bedingungen erfordern nothwendig die Konvergenz der für $f(x)$ und $\varphi(x)$ aufgestellten Reihen, weil ausserdem $Lim\, r_n$ und $Lim\, \overset{I}{R}_n$, ebenso $Lim\, \overset{II}{R}_n$, $Lim\, \overset{III}{R}_n$ etc. und endlich auch $Lim\, s_n$ von

Null verschieden ausfallen würden. So nothwendig nun auch die Konvergenz der Potenzenreihen für $f(x)$ und $\varphi(x)$ ist, so wenig erweist sie sich als hinreichend; denn aus der unbegränzten Abnahme von $\overset{I}{R}_n, \overset{II}{R}_n, \ldots \overset{n}{R}_n$ folgt durchaus nicht, dass $Lim\, s_n$ d. h.

$$Lim\left\{C_1 \overset{I}{R}_n + C_2 \overset{II}{R}_n + \ldots + C_n \overset{n}{R}_n\right\}$$

der Null gleich sein müsse; im Gegentheile weiss man, dass derartige Produktensummen in bestimmte Integrale übergehen, sobald die Anzahl der Produkte ins Unendliche wächst und jedes einzelne Produkt ins Unendliche abnimmt. Diese Bemerkungen geben zu erkennen, dass es ausser der Konvergenz der Potenzenreihen für $f(x)$ und $\varphi(x)$ noch anderer Determinationen bedarf, um die Entwickelung in 83. zur Geltung zu bringen. Wollte man dieselben dadurch auffinden, dass man den Ausdruck s_n einer genaueren Betrachtung unterzöge, so würde man sich in eine ziemlich weitläufige Untersuchung einlassen müssen, und diess ist der Grund, weshalb wir gleich von vornherein einen anderen Weg eingeschlagen haben.

§. 10.

Integrationen mittelst der Bürmann'schen Formel.

Man kommt bekanntlich häufig genug in den Fall, Integrale von der Form

84) $$\int f(x)\psi(x)\,dx$$

behandeln zu müssen, bei denen der eine Faktor $\psi(x)$ integrabel ist, also

85) $$\int \psi(x)dx = \varphi(x)$$

gesetzt werden kann, während sich das Integral 86. nicht durch

die gewöhnlichen Funktionen ausdrücken lässt. In solchen Fällen leistet die Bürmann'sche Reihe gute Dienste; da nämlich aus Nr. 85. folgt $\psi(x) = \varphi'(x)$, so geht das Integral in das folgende über

86) $$\int f(x)\,\varphi'(x)\,dx$$

und man hat durch Verwandlung von $f(x)$ in eine nach Potenzen von $\varphi(x) - \varphi(a)$ fortschreitende Reihe:

$$\int f(x)\varphi'(x)dx = A_0\int \varphi'(x)dx + \frac{1}{1}A_1\int[\varphi(x) - \varphi(a)]\,\varphi'(x)\,dx$$
$$+ \frac{1}{2}A_2\int[\varphi(x) - \varphi(a)]^2\varphi'(x)\,dx + \dots.$$

wo rechter Hand jede einzelne Integration ausführbar ist, indem man hat:

$$\int[\varphi(x) - \varphi(a)]^n\varphi'(x)\,dx = \frac{[\varphi(x) - \varphi(a)]^{n+1}}{n+1}$$

So wird nun

$$\int f(x)\varphi'(x)\,dx = \frac{1}{1}A_0\varphi(x) + \frac{1}{2}A_1[\varphi(x) - \varphi(a)]^2$$
$$+ \frac{1}{3}A_2[\varphi(x) - \varphi(a)]^3 + \dots + Const.$$

wofür man symmetrischer schreiben kann

$$\int f(x)\varphi'(x)dx = C + \frac{1}{1}A_0[\varphi(x) - \varphi(a)] + \frac{1}{2}A_1[\varphi(x) - \varphi(a)]^2$$
$$+ \frac{1}{3}A_2[\varphi(x) - \varphi(a)]^3 + \dots$$

indem man sich die vorige $Const. = C + A_0\varphi(a)$ gesetzt denkt. Restituirt man für $\varphi'(x)$ seinen Werth und berücksichtigt, dass zufolge der Gleichung 85.

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \int_a^x \psi(x)\,dx$$

ist, (vorausgesetzt, dass $\psi(x)$ innerhalb das Intervalles $x = a$ bis $x = x$ keine Unterbrechung der Kontinuität erleidet) so ergiebt sich noch

$$87)\quad \int f(x)\psi(x)dx = C + \frac{1}{1'} A_0 \int_a^x \psi(x)\,dx$$

$$+ \frac{1}{2'} A_1 \left[\int_a^x \psi(x)\,dx\right]^2 + \frac{1}{3'} A_2 \left[\int_a^x \psi(x)\,dx\right]^3 + \ldots.$$

Eine noch elegantere Gestalt erhält diese Formel, wenn man den Integrationskonstanten C denjenigen Werth giebt, den das unbestimmte Integral linker Hand für $x = a$ bekommt; so dass also für

$$\int f(x)\psi(x)\,dx = F(x) + C',$$

$C = F(a) + C'$ zu setzen ist; durch Transposition von C geht dann die linke Seite in

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(x)\,\psi(x)\,dx$$

über. Man gelangt so zu dei schönen Entwickelungsformel

$$88)\quad \int_a^x f(x)\,\psi(x)\,dx = \frac{A_0}{1'} \int_a^x \psi(x)\,dx + \frac{A_1}{2'} \left[\int_a^x \psi(x)\,dx\right]^2$$

$$+ \frac{A_2}{3'} \left[\int_a^x \psi(x)\,dx\right]^3 + \ldots.$$

worin die Koeffizienten wie folgt zu bestimmen sind:

89) $$A_n = D^{n-1}\left\{\left[\frac{x-a}{\int_a^x \psi(x)\,dx}\right]^n f'(x)\right\}_{(x=a)}$$

Die Bedingungen, unter welchen diese Entwickelung gültig bleibt, ergeben sich nach den über die Formel 76. gemachten Bemerkungen auf folgendem Wege: man löse zuerst die Gleichung $\psi(x) = o$ auf und nenne ξ ihre Wurzeln, bilde darauf die Gleichung

$$\int_a^x \psi(x)\,dx = mod \int_a^\xi \psi(x)\,dx$$

und bezeichne ihre Wurzeln durch b; die Formel 88. gilt dann für $b > x \geqq a$ vorausgesetzt, dass $\psi(x)$ während dieses Intervalles positiv bleibt und dass endlich $f(x)$ und $\psi(x)$ für $b > x \geqq a$ für sich allein in Potenzenreihen verwandelbar sein würden.

Eine brauchbare Anwendung hiervon bildet die Entwickelung des Integrales

$$\int_o^x \frac{f(x)}{1+x^2}\,dx$$

worin $a = o$, $\psi(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und mithin

$$\int_o^x \frac{dx}{1+x^2} = Arctan\,x$$

ist. Man erhält dann auf der Stelle die Entwickelung

90) $$\int_o^x \frac{f(x)}{1+x^2}\,dx = \frac{A_0}{1}Arctan\,x + \frac{A_1}{2}Arc^2tan\,x + \frac{A_2}{3}Arc^3tan\,x + \ldots.$$

welche nach dem, was wir in §. 7. mitgetheilt haben, für alle die positiven x gilt, für welche $f(x)$ in eine Potenzenreihe verwandelbar sein würde. Die Koeffizientenbestimmung ist dieselbe wie in §. 7. Für $f(x) = e^{rx}$, wo r eine beliebige positive oder negative Zahl bedeutet, ergiebt sich z. B. aus Nr. 90.

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} e^{rx} = \frac{Arctan\, x}{1'} + r\frac{Arc^2 tan\, x}{2'} + r^2\frac{Arc^3 tan\, x}{3'}$$

$$+ (2r + r^3)\frac{Arc^4 tan\, x}{4'} + (8r^2 + r^4)\frac{Arc^5 tan\, x}{5'}$$

$$+ (16r + 20r^3 + r^5)\frac{Arc^6 tan\, x}{6'} + \ldots\ldots$$

ferner ganz ähnlich für $f(x) = cos\, rx$,

$$\int_0^x \frac{cos\, rx}{1+x^2} dx = \frac{Arctan\, x}{1'} - r^2\frac{Arc^3 tan x}{3'} + (r^4 - 8r^2)\frac{Arc^5 tan x}{5'}$$

$$- (r^6 - 40r^4 + 136r^2)\frac{Arc^7 tan\, x}{7'} + \ldots$$

endlich für $f(x) = sin\, rx$,

$$\int_0^x \frac{sin\, rx}{1+x^2} dx = r\frac{Arc^2 tan\, x}{2'} - (r^3 - 2r)\frac{Arc^4 tan\, x}{4'}$$

$$+ (r^5 - 20r^3 + 16r)\frac{Arc^6 tan\, x}{6'} - \ldots$$

Sämmtliche Formeln gelten für alle positiven x.

Man kann übrigens die Idee einer Integration mittelst der Bürmann'schen Reihe noch in einer etwas anderen oft bequemeren Form ausführen. Bleiben wir nämlich bei der Gleichung

$$\textbf{91)}\quad \int f(x)\varphi'(x)\, dx = C + \frac{A_0}{1'}[\varphi(x)-\varphi(a)] + \frac{A_1}{2'}[\varphi(x)-\varphi(a)]^2 + \ldots$$

stehen und wenden auf die linke Seite die kekannte Formel der partiellen Integration an, so geht dieselbe über in

$$f(x)\varphi(x) - \int f'(x)dx.\varphi(x)$$

und wenn man ferner berücksichtigt, dass $A_0 = f(a)$ ist, so wird

$$f(x)\varphi(x) - \int f'(x)\varphi(x)dx$$

$$= C + f(a)\varphi(x) - f(a)\varphi(a)$$

$$+ \frac{A_1}{2'}[\varphi(x) - \varphi(a)]^2 + \frac{A_2}{3'}[\varphi(x) - \varphi(a)]^3 + \dots$$

Hier transponiren wir das Glied $f(a)\varphi(x)$ und setzen die willkührliche Konstante $C = f(a)\varphi(x) - C'$; es ist dann

$$\varphi(x)\left\{f(x) - f(a)\right\} - \left\{\int f'(x)\varphi(x)dx - C'\right\}$$

$$= \frac{A_1}{2'}[\varphi(x) - \varphi(a)]^2 + \frac{A_2}{3'}[\varphi(x) - \varphi(a)]^3 + \dots$$

Nehmen wir endlich

$$f(x) = \int F(x)\,dx, \text{ also } f'(x) = F(x)$$

so ist vermöge der Definition des bestimmten Integrales

$$f(x) - f(a) = \int_a^x xF(x)dx$$

und wenn wir endlich C' demjenigen Werthe gleichsetzen, welchen das Integral

$$\int f(x)\varphi(x)dx = \int F(x)\varphi(x)dx$$

für $x = a$ erhält, so gelangen wir zu der zweiten Entwickelungsformel

$$92)\quad \int_a^x F(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(x)\int_a^x F(x)\,dx$$

$$- \frac{A_1}{2}[\varphi(x) - \varphi(a)]^2 - \frac{A_2}{3}[\varphi(x) - \varphi(a)]^3 - \ldots$$

worin die Koeffizientenbestimmung nach der Formel geschieht:

$$93)\quad A_n = D^{n-1}\left\{\left(\frac{x-a}{\varphi(x)-\varphi(a)}\right)^n F(x)\right\}_{(x=a)}$$

Die Bedingungen für die Gültigkeit der Gleichung 92. finden sich auf ähnliche Weise wie bei der Bürmann'schen Reihe, indem man nur statt $f(x)$ zu sagen braucht $F(x)$, weil unmittelbar klar ist, dass sich $F(x)$ unter denselben Bedingungen wie $f(x)$ in eine Potenzenreihe verwandeln lässt.

Für $\varphi(x) = x : (1 + x^2)$, $a = o$ erhält man z. B. die sehr brauchbare unter der Bedingung $1 > x \geqq o$ geltende Formel:

$$94)\quad \int_o^x \frac{x\,F(x)}{1+x^2}\,dx = \frac{x}{1+x^2}\int_o^x F(x)dx$$

$$- \frac{A_1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2 - \frac{A_2}{3}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^3 - \ldots.$$

und zur Koeffizientenbestimmung ist:

$$95)\quad A_n = D^{n-1}\left\{(1+x^2)^n F(x)\right\}_{(x=o)}$$

$$= F^{(n-1)}(o) + (n-1)\,.\,n_1\,F^{(n-3)}(o)$$

$$+ (n-1)(n-2)(n-3)\,.\,n_2\,F^{(n-5)}(o)$$

$$+ (n-1)(n-2)\ldots(n-5\,.\,n_3\,F^{(n-7)}(o) + \ldots$$

Nach diesen Formeln würde es z. B. sehr leicht sein, die Integrale

$$\int_0^x \frac{x\,dx}{1+x^2}\,e^{rx},\ \int_0^x \frac{x\cos rx}{1+x^2}\,dx,\ \int_0^x \frac{x\sin rx}{1+x^2}\,dx$$

in Reihen zu verwandeln, welche für positive ächt gebrochene x anwendbar sind.

§. 11.

Die Umkehrung der Funktionen.

Wenn zwischen zwei Variabeln x uud y eine Gleichung von der Form $y = \varphi(x)$ besteht, d. h. y als Funktion von x gegeben ist, so muss umgekehrt auch x als Funktion von y betrachtet werden können und es zieht daher jede Gleichung der obigen Form eine zweite von der Form $x = \psi(y)$ nach sich. Diese Umkehrung der gegebenen Funktion $\varphi(x)$ lässt sich mittelst des Bürmann'schen Theoremes leicht bewerkstelligen, indem man von den Formeln

$$x = a + \frac{1}{1'} A_1\,\varphi(x) + \frac{1}{2'} A_2\,\varphi(x)^2 + \frac{1}{3'} A_3\,\varphi(x)^3 + \ldots\ldots\ldots$$

$$\textbf{96)}\qquad A_n = D^{n-1}\left[\left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^n\right]_{(x=a)}$$

ausgeht, welche aus der Bürmann'schen Reihe für $f(x) = x$ folgen. Nehmen wir jetzt $\varphi(x) = y$, so wird

$$\textbf{97)}\qquad x = a + \frac{1}{1'} A_1 y + \frac{1}{2'} A_2 y^2 + \frac{1}{3'} A_3 y^3 + \ldots$$

Hier ist nun x durch y ausgedrückt, also wegen $x = \psi(y)$

$$\textbf{98)}\qquad \psi(y) = a + \frac{1}{1'} A_1 y + \frac{1}{2'} A_2 y^2 + \frac{1}{3'} A_3 y^3 + \ldots$$

und damit die Natur der umgekehrten Funktion mit Hülfe einer unendlichen Reihe bestimmt, deren Koeffizienten aus der Formel

für A_n abgeleitet werden können. Vorausgesetzt wird hierbei, dass es einen Werth $x = a$ giebt, welcher $\varphi(x)$ zum Verschwinden bringt.

Um zu entscheiden, wie weit die Gleichung 97. oder 98. gilt, hat man nur nöthig, das reelle oder imaginäre Maximum von $\varphi(x)$ zu bestimmen, also die Gleichung $\varphi'(x) = o$ aufzulösen, deren Wurzeln $x = \xi$ heissen mögen, und ferner die Wurzeln $x = b$ der zweiten Gleichung $\varphi(x) = mod\, \varphi(\xi)$ aufzusuchen; die Formel 97. gilt dann von $x = a$ bis $x = b$ oder was Dasselbe ist, von $y = o$ bis $y = mod\, \varphi(\xi)$, welche letztere Bestimmung, namentlich für die Formel 98., in der gar kein x mehr vorkommt, anzuwenden wäre.

Aus der Bemerkung, dass x zwischen a und b enthalten ist, ergiebt sich noch ein wichtiges Resultat. Da nämlich eine gegebene Funktion mehrere Umkehrungen haben kann (aus $y = 1 - x^2$ folgt z. B. $x = \pm \sqrt{1 - y}$), so muss entschieden werden, welche von diesen verschiedenen Umkehrungen durch die Formel 98. dargestellt wird. Diess hat nach dem Obigen nicht die mindeste Schwierigkeit. Nehmen wir erst einmal an, es erlange die Funktion $y = \varphi(x)$ für $x = \xi$ ein reelles Maximum, so nimmt dieselbe über $x = \xi$ hinaus einen Theil der Werthe wieder an, die sie vorher schon einmal gehabt hat, und es entsprechen jedem gegebenen y mindestens zwei x, von denen eines $< \xi$ das andere $> \xi$ ist. Andererseits wird jetzt $b = \xi$ und da in Nr. 97. x zwischen a und b enthalten ist, so bekommt man durch die genannte Formel nur dasjenige x welches $< b = \xi$ ist, d. h. man erhält die kleinste aller möglichen Umkehrungen. Entspräche die Wurzel $x = \xi$ einem reellen Minimum, so würde die Formel 97. gar nicht anwendbar sein, weil sie eine Zunahme von $y = \varphi(x)$ voraussetzt; fände endlich weder ein reelles Maximum noch ein Minimum statt, so müsste die Funktion $y = \varphi(x)$ immer wachsen und dann giebt es überhaupt nur eine Umkehrung derselben, wenn sie kontinuirlich

ist; erleidet sie aber Unterbrechungen der Stetigkeit, so hört jede Entwickelung nach dem Bürmann'schen Satze schon bei der ersten derartigen Unterbrechung auf und die Formel 97. giebt daher auch nur diejenigen x, welche im ersten Intervalle der Kontinuität liegen, wenn auch noch andere x zu einem gegebenen y gehören sollten. Auf alle Fälle also liefern die Gleichungen 97. und 98. immer nur die kleinste aller möglichen Umkehrungen von $y = \varphi(x)$.

Um diese Bemerkungen durch ein Beispiel zu erläutern, betrachten wir die Funktion

99) $$y = \frac{x}{\cos x}$$

Die Gleichung $\varphi'(x) = o$ wird dann $x + \cot x = o$ und sie hat unendlich viele reelle Wurzeln, welche der Reihe nach zwischen $x = \frac{1}{2}\pi$ und $x = \pi$, $x = \frac{3}{2}\pi$ und $x = 2\pi$ etc. liegen. Wollte man für ξ die erste dieser Wurzeln nehmen, so würde die Gleichung

100) $$x = \frac{1}{1}A_1 \frac{x}{\cos x} + \frac{1}{2}A_2\left(\frac{x}{\cos x}\right)^2 + \frac{1}{3}A_3\left(\frac{x}{\cos x}\right)^3 + \dots$$

von $x = o$ bis zu einem über $\frac{1}{2}\pi$ hinausliegenden Werthe bestehen müssen, was sich durch die einfache Bemerkung, dass $\frac{x}{\cos x}$ bei $x = \frac{\pi}{2}$ diskontinuirlich wird, als unrichtig ausweist. Hierin liegt ein deutlicher Fingerzeig, dass kleinere Wurzeln der Gleichung $x + \cot x = o$ übersehen worden sind, und da dieselben nicht reell sein können, so müssen sie imaginär sein. Und in der That, wenn man $x = zi$ setzt, so geht die Gleichung $x + \cot x$ in die folgende über

$$z - \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} = o \text{ oder } z - 1 - \frac{2}{e^{2z} - 1} = o$$

und diese besitzt eine reelle Wurzel zwischen 1 und 2, nämlich

$$z = 1{,}199678 \dots$$

Nennen wir dieselbe ζ, so ist jetzt $\xi = \zeta i$ und die Gleichung 100. oder die folgende

$$101)\qquad x = \frac{1}{1'} A_1 y + \frac{1}{2'} A_2 y^2 + \frac{1}{3'} A_3 y^3 + \ldots\ldots$$

gilt von $y = o$ bis $y = mod\,\varphi(\xi) = mod\,\varphi(\zeta i)$; man findet aber leicht

$$mod\,\varphi(\zeta i) = mod\,\frac{\zeta i}{cos(\zeta i)} = \frac{2\zeta}{e^{\zeta} + e^{-\zeta}} = 0{,}662742\ \ldots$$

und folglich bleibt die Formel 101. von $y = 0$ bis $y = 0{,}662742\ldots$ anwendbar..

Mit gleicher Leichtigkeit, wie aus der Gleichung $y = \varphi(x)$ die Umkehrung $x = \psi(y)$ abgeleitet wurde, kann man auch jede gegebene Funktion dieser Umkehrung, etwa $f(x) = f[\psi(y)]$ erhalten. Man hat zu diesem Zwecke nur nöthig, von den Formeln

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1'} A_1 \varphi(x) + \frac{1}{2'} A_2 \varphi(x)^2 + \ldots$$

$$102)\qquad A_n = D^{n-1}\left\{\left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^n f'(x)\right\}_{(x=o)}$$

auszugehen und wiederum $\varphi(x) = y$ zu setzen; es folgt dann

$$103)\quad f(x) = f(a) + \frac{1}{1'} A_1 y + \frac{1}{2'} A_2 y^2 + \frac{1}{3'} A_3 y^3 + \ldots.$$

oder

$$104)\quad f[\psi(y)] = f(a) + \frac{1}{1'} A_1 y + \frac{1}{2'} A_2 y^2 + \frac{1}{3'} A_3 y^3 + \ldots$$

und damit ist das Problem gelöst. Die Bestimmung für die Gränzen der Gültigkeit dieser Formeln geschieht ganz so wie vorhin, nur würde zu berücksichtigen sein, dass durch eine Unterbrechung der Kontinuität, welche $f(x)$ innerhalb des vorhin ermittelten Intervalles a bis b, etwa bei $x = \lambda$, erlitte, die Gültigkeitsgränzen auf $x = a$ bis $x = \lambda$ verengert werden. Ebenso wiederholt sich die Bemerkung,

dass unter dem $\psi(y)$, welches die Gleichung 104. enthält, lediglich die kleinste aller möglichen Umkehrungen von $\varphi(x)$ zu verstehen ist.

Sowie die Umkehrung der Funktionen nur eine einfache Anwendung der Bürmann'schen Formel, oder besser, eine kleine Transformation derselben unter verändertem Gesichtspunkte darstellt, so ist auch die von *Lagrange* gegebene Umkehrungsformel nicht mehr als eine etwas spezialisirte Darstellung von ihr bei veränderter Gestalt. Die genannte Umkehrungsformel hat bekanntlich den Zweck aus einer Gleichung wie

$$y = x\chi(y) + a$$

y als Funktion von x zu bestimmen, oder noch allgemeiner, etwa $F(y)$ durch x auszudrücken. Vertauschen wir, um unmittelbar die Bürmann'sche Reihe anwenden zu können, die Bezeichnung der Variabelen, so dass jetzt x ist, was bei *Lagrange* y heisst und umgekehrt, so wäre aus der Gleichung

105) $$x = y\chi(x) + a$$

x oder $F(x)$ durch y ausgedrückt, zu entwickeln. Geben wir der vorstehenden Gleichung die Form

106) $$y = \frac{x - a}{\chi(x)}$$

so erkennt man auf der Stelle, dass die Aufgabe auf die vorige zurückkommt, wenn man $\frac{x-a}{\chi(x)}$ für $\varphi(x)$ setzt. Dabei verschwindet $\varphi(x)$ im Allgemeinen für $x = a$ und wir haben daher

$$F(x) = F(a) + \frac{1}{1}A_1\left(\frac{x-a}{\chi(x)}\right) + \frac{1}{2}A_2\left(\frac{x-a}{\chi(x)}\right)^2 + \dots$$

107) $$A_n = D^{n-1}\left\{\chi(x)^n F'(x)\right\}_{(x=a)}$$

oder wegen der Gleichung 106.

$$108)\quad F(x) = F(a) + \frac{1}{1'} A_1 y + \frac{1}{2'} A_2 y^2 + \frac{1}{3'} A_3 y^3 + \dots$$

Zur Bestimmung der Gültigkeitsgränzen ist die Auflösung der Gleichung $\varphi'(x) = o$, d. h.

$$\chi(x) = (x - a)\chi'(x)$$

erforderlich, deren kleinste Wurzel ξ heissen möge; die Formel 108. gilt dann von $y = 0$ bis $y = mod\,\varphi(\xi)$, d. h. von $y = 0$ bis

$$y = mod\,\frac{\xi - a}{\chi(\xi)} = mod\,\frac{1}{\chi'(\xi)}$$

was mit der von *Cauchy* auf anderem Wege entwickelten Gränzenbestimmung völlig übereinstimmt.

Wenn man nach unseren hiermit beendigten Untersuchungen über die Bürmann'sche Reihe zu dem Ausspruche berechtigt ist, dass dieselbe alle bisher bekannten nach Potenzen irgend einer Hauptgrösse fortschreitenden Reihenentwickelungen als spezielle Fälle in sich enthält, so wird man es nicht unpassend finden, wenn wir die Aufmerksamkeit der Analytiker wiederum auf jenes fast verschollene Theorem hingeleitet und demselben eine längere Erörterung gewidmet haben.

III.

Ueber approximative Quadraturen.

In der *théorie analytique des probabilités (Livre I., seconde partie, Chap. III.)* giebt *Laplace* eine Methode zur numerischen Berechnung hauptsächlich solcher bestimmter Integrale

$$1) \qquad \int_\alpha^\beta f(z)\,dz$$

in welchen die Funktion $f(z)$ sowohl für $z = \alpha$ als $z = \beta$ verschwindet und innerhalb des Intervalles $z = \alpha$ bis $z = \beta$ nur ein einziges Maximum oder Minimum erreicht, ohne diskontinuirlich oder unendlich zu werden, (geometrisch betrachtet, ist diess die Quadratur der mondförmigen Fläche, welche eine Kurve zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchschnitten mit der Abscissenachse bildet); jene Methode besteht dem Wesentlichen nach in folgenden Operationen. Wenn die Funktion $f(z)$ für $z = \mu$, wo μ zwischen α und β liegt, ihr Maximum erreicht, so ist der Quotient $\frac{f(z)}{f(\mu)}$ innerhalb des Intervalles $z = \alpha$ bis $z = \beta$ ein ächter Bruch, welcher bis zur Null abnimmt, wenn man z entweder vorwärts von μ bis β oder rückwärts von μ bis α gehen lässt; man kann daher $\frac{f(z)}{f(\mu)}$ mit irgend einer abnehmenden Funktion vergleichen, deren Variable noch unbestimmt bleibt. *Laplace* setzt

$$2) \qquad \frac{f(z)}{f(\mu)} = e^{-y^2} \quad \text{oder} \quad f(z) = f(\mu)\,e^{-y^2}$$

und sieht nun y als die neue Variable der Integration an, so dass noch dz durch dy auszudrücken ist. Denkt man sich die vorstehende Gleichung nach z aufgelöst, so würde daraus etwa $z = \varphi(y)$ und $dz = \varphi'(y)\,dy$ folgen und das Integral in Nr. 1. erhält jetzt folgende Form

$$f(\mu)\int e^{-y^2}\,\varphi'(y)\,dy$$

worin noch die für y geltenden Integrationsgränzen zu bestimmen sind. Aus Nr. 2. folgt aber für $z = \alpha$ und $z = \beta$ wegen $f(\alpha) = 0$ und $f(\beta) = 0$, dass an den Gränzen die Gleichung

$$e^{-y^2} = 0$$

statt finden muss, woraus sich für y die Gränzwerthe $y = +\infty$ und $y = -\infty$ ergeben. Demnach wird

$$\int_\alpha^\beta f(z)\,dz = f(\mu)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,\varphi'(y)\,dy$$

und hier lässt sich die Integration rechter Hand dadurch ausführen, dass man $\varphi'(y)$ in eine Reihe von der Form

$$C_0 + C_1 y + C_2 y^2 + C_3 y^3 + \dots$$

verwandelt; unter der doppelten Bemerkung, dass für ein ganzes positives n

$$3) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} y^{2n-1}\,e^{-y^2}\,dy = 0$$

$$4) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} y^{2n} e^{-y^2}\,dy = \frac{1\,.\,2\,.\,5\,\dots\,(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$$

findet man jetzt auf der Stelle

$$5) \qquad \int_\alpha^\beta f(z)\,dz = f(\mu)\sqrt{\pi}\left\{C_0 + \frac{1}{2}C_2 + \frac{1\,.\,3}{2^2}C_4 + \frac{1.3.5}{2^3}C_6 + \dots\right\}$$

Man wird leicht bemerken, dass dieser Ableitung der Endformel, welche das allgemeine Schema der *Laplace*'schen Entwickelungen bildet, eine nicht unbedeutende stillschweigende Annahme zu Grunde liegt; es wird nämlich vorausgesetzt, dass die für $\varphi'(y)$ substituirte Potenzenreihe für alle reellen y der Funktion $\varphi'(y)$ gleichgelte, weil es ausserdem sehr zweierlei ist, ob man die Differenzialformel $e^{-yy}\,\varphi'(y)dy$ oder die Reihe $e^{-yy}(C_0 + C_1 y + \text{etc.})\,dy$ zwischen den Gränzen $y = -\infty$ bis $y = +\infty$ integrirt. Diese Schwierigkeit hat *Laplace*, wie man aus der am Ende des Kapitels befindlichen *remarque générale sur la convergence des series* schliessen kann, zwar bemerkt aber nicht beseitigt, weil die Bedingungen, unter denen eine Funktion mittelst einer Potenzenreihe umgekehrt werden kann, zu jener Zeit noch unbekannt waren. Nach den Untersuchungen der vorigen Abhandlung macht es keine Mühe, diesen Punkt zur vollständigen Klarheit zu bringen und wir geben daher im Folgenden eine neue Bearbeitung dieses Gegenstandes überhaupt, bei welcher wir jedoch die Auffassung so verallgemeinern, dass man den *Laplace*'schen Formeln beliebig viele andere zur Seite stellen kann.

§. 1.

Wenn eine Funktion $f(z)$ für $z = \mu$ ein positives Maximum, später für $z = \nu$ ein negatives Minimum erreicht und von $z = \mu$ bis $z = \nu$ stetig verläuft, so muss sie innerhalb des genannten Intervalles den Werth Null bekommen und es giebt also einen Werth $z = \beta$ zwischen μ und ν, für welchen $f(\beta) = 0$ wird. Schalten wir zwischen μ und β noch ein Argument $z = \alpha$ ein, so dass jetzt $\mu < \alpha < \beta < \nu$ ist, so nimmt die Funktion $f(z)$ von $z = \alpha$ bis $z = \beta$ fortwährend ab, und wenn wir uns vor der Hand auf dieses Intervall beschränken, so ist $f(\alpha)$ der grösste und $f(\beta) = 0$ der kleinste vorkommende Werth der Funktion, ohne dass jedoch $f(\alpha)$ ein Maximum oder $f(\beta)$ ein Minimum wäre. Nach diesen Bemerkungen bildet in dem Integrale

$$6) \qquad \int_{\alpha}^{\beta} f(z)\,dz$$

der Quotient $\frac{f(z)}{f(\alpha)}$ einen fortwährend abnehmenden Bruch, welcher für $z = \alpha$ seinen grössten Werth 1 und für $z = \beta$ seinen kleinsten Werth Null erreicht, und wir vergleichen daher jenen Quotienten mit einer gleichfalls abnehmenden Funktion $F(y)$ indem wir

$$7) \qquad \frac{f(z)}{f(\alpha)} = F(y) \text{ oder } f(z) = f(\alpha)\,F(y)$$

setzen, Da uns die Wahl dieser Funktion vollkommen frei steht, so können wir sie unter der Form einer Potenzenreihe darstellen, deren erstes Glied die Einheit ist, also etwa:

$$8) \qquad F(y) = 1 - L_1 y - L_2 y^2 - L_3 y^3 - \ldots$$

und es hat diese Annahme den Vortheil, dass dem Werthe $z = \alpha$ der Werth $y = 0$ entspricht, wie man sogleich erkennen wird, wenn man die Gleichung 8. in die vorhergehende substituirt und $z = \alpha$ setzt. Ist ferner $z = \beta$ geworden, so verwandelt sich die Gleichung 7. in $0 = F(y)$ und durch Auflösung dieser numerischen Gleichung findet man denjenigen Werth von y, etwa $y = \eta$, welcher dem Werthe $x = \beta$ entspricht. Wenn daher in dem Folgenden y als neue Variable der Integration betrachtet wird, so treten an die Stelle der früheren Integrationsgränzen $x = \alpha$ und $x = \beta$ die neuen Gränzen $y = 0$ und $y = \eta$.

Um nun dz durch das Differenzial der neuen Variabeln y auszudrücken, könnte man sich des in der Einleitung bezeichneten Verfahrens bedienen, nämlich die Gleichung 7. nach z auflösen und nachher differenziren; diess würde aber nur in wenigen, ganz besonderen Fällen glücken. Die Funktion $f(z)$ nämlich müssen wir als eine gegebene betrachten und können mithin nicht verlangen, dass eine Gleichung wie $f(z) = u$ ohne weiteres nach z auflösbar

sei, die einfachen Fälle aber, in denen eine solche Umkehrung der Gleichung $f(z) = u$ leicht ausführbar wäre, sind gerade auch diejenigen, bei welchen man die ganze Näherungsmethode selber nicht brauchen wird, weil sich dann die Integration selbst gewöhnlich ausführen lässt. Dagegen kann man die immer noch unbestimmte Funktion $F(y)$ so wählen, dass sich eine Gleichung von der Form $F(y) = q$ leicht nach y auflösen lässt, und etwa giebt $y = E(q)$, wo E als Funktionszeichen dient. Aus der Gleichung 7. folgt dann

$$9)\qquad y = E\left(\frac{f(z)}{f(\alpha)}\right)$$

Um hieraus dz durch dy ausgedrückt zu erhalten, setzen wir zunächst:

$$10)\quad x = A_0 + \frac{1}{1'}A_1\, E\left(\frac{f(\alpha+x)}{f(\alpha)}\right) + \frac{1}{2'}A_2\, \overline{E\left(\frac{f(\alpha+x)}{f(\alpha)}\right)}^2 + \dots$$

was nichts Anderes als die Anwendung des Bürmann'schen Satzes ist für $\varphi(x) = E\left(\frac{f(\alpha+x)}{f(\alpha)}\right)$. Da wir schon wissen, dass für $z = \alpha$, $y = 0$ wird, so folgt aus Nr. 9. für $z = \alpha$, $0 = E(1)$, woraus hervorgeht, dass die Funktion

$$\varphi(x) = E\left(\frac{f(\alpha+x)}{f(\alpha)}\right)$$

für $x = 0$ verschwindet. Die Bestimmung der Koeffizienten A in der Reihe 10. geschieht daher mittelst der Formel 24. der vorigen Abhandlung für $a = 0$ und es ist daher:

$$11)\qquad A_0 = 0,\ A_n = D^{n-1}\left[\frac{x}{E\left(\frac{f(\alpha+x)}{f(\alpha)}\right)}\right]^n_{(x=0)}$$

Nehmen wir in den Gleichungen 10. und 11. $x = z - \alpha$, so folgt

$$12)\quad z - \alpha = \frac{1}{1'}A_1\, E\left[\frac{f(z)}{f(\alpha)}\right] + \frac{1}{2'}A_2\, \overline{E\left[\frac{f(z)}{f(\alpha)}\right]}^2 + \dots$$

$$13)\qquad A_n = D^{n-1}\left(\frac{z-\alpha}{E\left[\frac{f(z)}{f(\alpha)}\right]}\right)^n_{(z=\alpha)}$$

und hier können wir wegen der Gleichung 9. auch schreiben:

$$14)\qquad z-\alpha = \frac{1}{1'}A_1 y + \frac{1}{2'}A_2 y^2 + \frac{1}{3'}A_3 y^3 + \dots$$

Es fragt sich nun noch, wie weit die Entwickelung 12. oder die mit ihr identische 14. gültig bleibt. Diese Frage beantwortet sich leicht durch folgende Bemerkungen. Vermöge der über $f(z)$ gemachten Voraussetzungen nimmt diese Funktion ab von $z=\mu$ bis $z=\nu$, also auch von $z=\alpha$ bis $z=\nu$, an welcher letzteren Stelle $f(z)$ ihr negatives Minimum erreicht; da ferner $F(y)$ eine abnehmende Funktion bezeichnet, so nimmt y von Null an zu, während z von α aus weiter schreitet und es erhält y sein Maximum, wenn z den Werth $z=\nu$ erreicht; daher ist auch

$$y = E\left[\frac{f(z)}{f(\alpha)}\right]$$

eine zunehmende Funktion, welche sich bei $z=\alpha$ annullirt und bei $z=\nu$ ihren Maximalwerth erhält, wie man auch *a posteriori* aus dem Differenzialquotienten von E ersehen kann. Zufolge der Bedingungen, welche wir über die Gültigkeit der Bürmann'schen Reihe aufgestellt haben, besteht nun die Gleichung 12. von $z=\alpha$ bis $z=\nu$ also, weil $\beta<\nu$, um so gewisser von $z=\alpha$ bis $z=\beta$. Dasselbe gilt von der Gleichung 14., bei welcher nur noch erinnert werden möge, dass dem Intervalle $z=\alpha$ bis $z=\beta$ das Intervall $y=0$ bis $y=\eta$ entspricht. Durch Differenziation der Gleichung 14. wird nun für $\eta \geqq y \geqq 0$

$$15)\qquad dz = \left(A_1 + \frac{1}{1'}A_2 y + \frac{1}{2'}A_3 y^2 + \dots\right)dy$$

womit die Aufgabe gelöst ist dz durch dy auszudrücken. Substituiren

wir endlich die Werthe von $f(z)$ und dz in das ursprüngliche Integral, so ist

16)
$$\int_\alpha^\beta f(z)\,dz$$

$$= f(\alpha)\int_o^\eta F(y)\left\{A_1 + \frac{1}{1'}A_2 y + \frac{1}{2'}A_3 y^2 + \ldots\right\} dy$$

und diess bleibt immer richtig, weil die Substitution 15. für alle zwischen den Integrationszeichen 0 befindlichen y gültig ist. Hat man nun $F(y)$ so gewählt, dass sich die Integration

$$\int_o^\eta F(y)\,y^m\,dy$$

für ganze positive m ausführen lässt, so erhält man aus Nr. 16. durch Integration der einzelnen Summanden eine Reihe, in welcher die Koeffizienten A nach Nr. 11. oder Nr. 13. zu bestimmen sind.

Die Ausführung dieser allgemeinen Ideen wollen wir an einigen Spezialisirungen der willkührlichen Funktion $F(y)$ zeigen.

I. Sei zuerst $F(y) = 1 - y$ also

17)
$$\frac{f(z)}{f(\alpha)} = 1 - y \text{ oder } f(z) = f(\alpha)(1 - y)$$

so folgt umgekehrt

18)
$$y = 1 - \frac{f(z)}{f(\alpha)}$$

Da nach den gemachten Voraussetzungen $f(\alpha)$ der grösste Werth ist, welchen $f(z)$ während des Intervalles $z = \alpha$ bis $z = v$ abnimmt und da ferner $f(\beta) = 0$ ist, so entspricht dem Intervalle $z = \alpha$ bis $z = \beta$ das neue Intervall $y = 0$ bis $y = 1$. Setzen wir weiter

$$19)\quad x = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 \left\{1 - \frac{f(\alpha + x)}{f(\alpha)}\right\} + \frac{1}{2'} A_2 \left\{1 - \frac{f(\alpha + x)}{f(\alpha)}\right\}^2 + \ldots\ldots$$

worin dem Bürmann'schen Satze zufolge

$$20)\quad A_0 = 0,\ A_n = D^{n-1} \left\{\frac{x}{1 - \frac{f(\alpha + x)}{f(\alpha)}}\right\}^n_{(x = 0)}$$

ist, so gilt die Reihe 19. von $x = 0$ an bis dahin, wo $1 - \frac{f(\alpha + x)}{f(\alpha)}$ sein Maximum erreicht, d. h. bis $x = v - \alpha$, weil in diesem Falle der Subtrahendus $\frac{f(\alpha + x)}{f(\alpha)}$ sein Minimum $\frac{f(v)}{f(\alpha)}$ bekommt. Für $x = z - \alpha$ folgt aus Nr. 19., dass die Reihe

$$z - \alpha = \frac{1}{1'} A_1 \left\{1 - \frac{f(z)}{f(\alpha)}\right\} + \frac{1}{2'} A_2 \left\{1 - \frac{f(z)}{f(\alpha)}\right\}^2 + \ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{1'} A_1 y + \frac{1}{2'} A_2 y^2 + \frac{1}{3'} A_3 y^3 + \ldots\ldots$$

von $z = \alpha$ bis $z = v$ also um so mehr von $z = \alpha$ bis $z = \beta$, d. h. von $y = 0$ bis $y = 1$ richtig bleibt. Dasselbe gilt von dem Differenzialquotienten:

$$21)\quad dz = (A_1 + \frac{1}{1'} A_2 y + \frac{1}{2'} A_3 y^2 + \ldots)\, dy$$

und vermöge der Gleichungen 17. und 21. ist nun

$$\int_\alpha^\beta f(z)\, dz$$

$$= f(\alpha) \int_0^1 (1 - y) \left\{A_1 + \frac{1}{1'} A_2 y + \frac{1}{2'} A_3 y^2 + \ldots\right\} dy$$

und durch Ausführung der einzelnen Integrationen

$$22)\qquad \int_\alpha^\beta f(z)\,dz = f(\alpha)\left\{\frac{A_1}{2'} + \frac{A_2}{3'} + \frac{A_3}{4'} + \dots\right\}$$

worin die Koeffizienten A nach der Formel 20. zu bestimmen sind.

II. Nehmen wir $F(y) = e^{-y}$ also

$$23)\qquad \frac{f(z)}{f(\alpha)} = e^{-y} \text{ oder } y = lf(\alpha) - lf(z)$$

so wächst y von $z = \alpha$ bis $z = \nu$, wo $f(z)$ sein Minimum erreicht Die Entwickelung

$$x = A_0 + \frac{1}{1'}A_1\,[lf(\alpha) - lf(\alpha + x)] + \frac{1}{2'}A_2\,[lf(\alpha) - lf(\alpha + x)] + \dots$$

gilt von $x = 0$, wo $lf(\alpha) - lf(\alpha + x)$ verschwindet, bis $x = \nu - \alpha$ wo $lf(\alpha) - lf(\alpha + x)$ sein Maximum erreicht und es ist dabei

$$24)\qquad A_0 = 0,\ A_n = D^{n-1}\left[\frac{x}{lf(\alpha) - lf(\alpha + x)}\right]^n_{(x = 0)}$$

Für $\alpha + x = z$ folgt daraus, dass die Gleichung

$$z - \alpha = \frac{1}{1'}A_1\,[lf(\alpha) - lf(z)] + \frac{1}{2'}A_2\,[lf(\alpha) - lf(z)]^2 + \dots$$

$$= \frac{1}{1'}A_1 y + \frac{1}{2'}A_2 y^2 + \frac{1}{3'}A_3 y^3 + \dots\dots$$

von $z = \alpha$ bis $z = \nu$, also um so mehr von $z = \alpha$ bis $z = \beta < \nu$ gilt, welchem Intervalle die Gränzen $y = 0$ und $y = \infty$ entsprechen. Es ist daher von $y = 0$ bis $y = \infty$

$$25)\qquad dz = (A_1 + \frac{1}{1'}A_2 y + \frac{1}{2'}A_3 y^2 + \dots)\,dy$$

und durch Substitution der für $f(z)$ und dz gleichgeltenden Werthe

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)\,dz$$

$$= f(\alpha)\int_{0}^{\infty} e^{-y}\left\{A_1 + \frac{1}{1'}A_2 y + \frac{1}{2'}A_3 y^2 + \ldots\right\} dy$$

d. i. durch Ausführung der einzelnen Integrationen

26) $$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)\,dz = f(\alpha)\left\{A_1 + A_2 + A_3 + \ldots\right\}$$

worin die Koeffizienten nach der Formel 24. bestimmt werden müssen.

§. 2.

Die Entwickelungen des vorigen Paragraphen erleiden eine sehr wesentliche Modifikation in dem Falle, wo μ nicht grösser, sondern gleich α ist, so dass also im Anfange des Integrationsintervalles $\alpha = \mu$ bis β die Funktion $f(z)$ ihr Maximum erreicht. Wollte man nämlich in dem nunmehrigen Integrale

27) $$\int_{\mu}^{\beta} f(z)\,dz$$

analog der Gleichung 7. die Substitution $f(z) = f(\mu)\,F(y)$ vornehmen, so würde daraus folgen

28) $$f'(z)\,dz = f(\mu)\,F'(y)\,dy \text{ oder } dz = \frac{f(\mu)\,F'(y)}{f'(z)}\,dy$$

und da $f'(z)$ gleich im Anfange für $z = \mu$ verschwindet, so würde sich das Differenzial von z in diesem Falle unter die Form $\frac{1}{0}\,dy$ stellen. In der That werden hier auch sämmtliche durch A bezeichnete Koeffizienten unendlich, wie wir kurz an dem ersten derselben zeigen wollen. Nach Formel 11. wäre nämlich

$$A_1 = \frac{x}{E\left[\frac{f(\mu + x)}{f(\mu)}\right]} \text{ für } x = 0$$

d. i. nach dem Taylor'schen Theoreme, welches hier wenigstens für unendliche kleine x anwendbar sein muss

$$A_1 = \frac{x}{E\left[1 + \frac{f'(\mu)}{f(\mu)}x + \frac{1}{2}\frac{f''(\mu)}{f(\mu)}x^2 + \ldots\right]}, \quad x = 0$$

$$= \frac{x}{E\left[1 + \frac{1}{2}\frac{f''(\mu)}{f(\mu)}x^2 + \ldots\right]}, \quad x = 0$$

weil $f'(\mu) = 0$ ist. Berücksichtigen wir weiter, dass ebenfalls zufolge des Theoremes von *Taylor*, wenigstens innerhalb eines kleinen Intervalles

$$E(1 + q) = E(1) + E'(1)q + \frac{1}{2}E''(1)q^2 + \ldots$$

sein muss, so haben wir wegen $E(1) = 1$,

$$A_1 = \frac{x}{E'(1)\left\{\frac{1}{2}\frac{f''(\mu)}{f(\mu)}x^2 + \ldots\right\} + \ldots\ldots}, \quad x = 0$$

d. h. $A_1 = \frac{1}{0}$, so dass also in diesem Falle die ganze Reihenentwickelung unendlich wird. Diesem Uebelstande kann man leicht aus dem Wege gehen; erinnert man sich, dass dem Anfangswerthe $z = \alpha = \mu$ der Werth $y = 0$ entspricht, so folgt aus 28. für $z = \mu$ und $y = 0$, $0 = f(\mu)F'(o)dy$ d. h. $F'(o) = 0$; wenn man also für $F(y)$ die Form 8. beibehalten will, so muss jetzt $L_1 = 0$ sein, also

29) $$F(y) = 1 - L_2 y^2 - L_3 y^3 - \ldots$$

Wir geben hierzu ein Paar Beispiele.

I. Die einfachste Supposition, welche über die abnehmende Funktion $F(y)$ gemacht werden kann, wenn sie zugleich der Form 29 genügen soll, ist offenbar $F(y) = 1 - y^2$; setzen wir also in dem Integrale 27.

30) $$\frac{f(z)}{f(\mu)} = 1 - y^2$$

so folgt umgekehrt

31) $$y = \sqrt{1 - \frac{f(z)}{f(\mu)}}$$

Dem Werthe $z = \mu$ entspricht $y = 0$ und dem Werthe $z = \beta$, $y = 1$, weil $f(\beta)$ verschwindet; es sind also $y = 0$ und $y = 1$ die für y geltenden Integrationsgränzen. Um nun dy durch dz auszudrücken, entwickeln wir erst wie folgt:

32) $$x = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 \sqrt{1 - \frac{f(\mu + x)}{f(\mu)}} + \frac{1}{2'} A_2 \sqrt{1 - \frac{f(\mu + x)}{f(\mu)}}^{\,2} + \ldots\ldots$$

Darin bestimmen sich die Koeffizienten A mittelst des Werthes $x = 0$, weil dann die Grössen rechter Hand verschwinden; also

33) $$A_0 = 0,\ A_n = D^{n-1} \left\{ \left(\frac{x}{\sqrt{1 - \frac{f(\mu + x)}{f(\mu)}}} \right)^n \right\}_{(x = o)}$$

Weil nun die Funktion

$$\sqrt{1 - \frac{f(\mu + x)}{f(\mu)}}$$

von $x = 0$ an, wo sie sich annullirt, bis $z = \beta - \mu$, wo sie ihr Maximum erreicht, fortwährend wächst, so gilt die Entwickelung 32. von $x = 0$ bis $x = \beta - \mu$; für $x = z - \mu$ folgt daraus, dass die Gleichung

$$z - \mu = \frac{1}{1'} A_1 \sqrt{1 - \frac{f(z)}{f(\mu)}} + \frac{1}{2'} A_2 \sqrt{1 - \frac{f(z)}{f(\mu)}}^{\,2} + \cdots\cdots$$

$$= \frac{1}{1'} A_1 y + \frac{1}{2'} A_2 y^2 + \frac{1}{3'} A_3 y^3 + \cdots\cdot$$

von $z = \mu$ bis $z = \beta$, d. h. von $y = 0$ bis $y = 1$ richtig bleibt. Dasselbe gilt jetzt von der Entwickelung

34) $$dz = \left(A_1 + \frac{1}{1'} A_2 y + \frac{1}{2'} A_3 y^2 + \cdots\cdots\right) dy$$

die wir gerade auch innerhalb des Integrationsintervalles $y = 0$ bis $y = 1$ gebrauchen. Durch Substitution der Gleichungen 30. und 34. in 27. wird jetzt

$$\int_\mu^\beta f(z)\, dz$$

$$= f(\mu) \int_0^1 (1 - y^2)\, \left(A_1 + \frac{1}{1'} A_2 y + \frac{1}{2'} A_3 y^2 + \cdots\right) dy$$

und durch Ausführung der einzelnen Integrationen

35) $$\int_\mu^\beta f(z)\, dz = 2 f(\mu) \left\{\frac{A_1}{1'.3} + \frac{A_2}{2'.4} + \frac{A_3}{3'.5} + \cdots\right\}$$

wobei die Koeffizienten A nach der Formel 33. zu bestimmen sind.

II. Eine zweite der für $F(y)$ aufgestellten Bedingungen genügende Annahme wäre $F(y) = e^{-yy}$ also

36) $$f(z) = f(\mu) e^{-yy}$$

woraus umgekehrt folgt

37) $$y = \sqrt{lf(\mu) - lf(z)}$$

und hier entsprechen den Gränzen $z = \mu$, $z = \beta$ die für y geltenden Gränzen $y = 0$, $y = \infty$. Um nun dz durch dy auszudrücken, setzen wir zunächst

38) $x = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 \sqrt{lf(\mu) - lf(\mu + x)}$

$$+ \frac{1}{2'} A_2 \sqrt{lf(\mu) - lf(\mu + x)}^2 + \ldots.$$

worin die Koeffizienten nach der Formel bestimmt werden:

39) $A_0 = 0, \; A_n = D^{n-1} \left\{ \left[\frac{x}{\sqrt{lf(\mu) - lf(\mu + x)}} \right]^n \right\}_{(x = 0)}$

Es gilt dann die Entwickelung 38. von $x = 0$ bis $x = \beta - \mu$, weil im ersten Falle die Funktion $\sqrt{lf(\mu) - lf(\mu + x)}$ verschwindet und im zweiten ihr reelles Maximum erreicht. Für $x = z - \mu$ wird nun innerhalb der Gränzen $z = \mu$ bis $z = \beta$, d. h. $y = 0$ bis $y = \infty$

$$z - \mu = \frac{1}{1'} A_1 \sqrt{lf(\mu) - lf(z)} + \frac{1}{2'} A_2 \sqrt{lf(\mu) - lf(z)}^2 + \ldots$$

$$= \frac{1}{1'} A_1 y + \frac{1}{2'} A_2 y^2 + \frac{1}{3'} A_3 y^3 + \ldots.$$

folglich

40) $dz = (A_1 + \frac{1}{1'} A_2 y + \frac{1}{2'} A_3 y^2 + \ldots..) \, dy$

Durch Substitution von 36. und 40. in Nr. 27. folgt jetzt

$$\int_\mu^\beta f(z) \, dz$$

$$= f(\mu) \int_\mu^\infty e^{-yy} (A_1 + \frac{1}{1'} A_2 y + \frac{1}{2'} A_3 y^2 + \ldots.) \, dy$$

Hier lassen sich sämmtliche Integrationen ausführen, indem man sich an die bekannten Formeln

$$\int_0^\infty y^{2n} e^{-yy}\,dy = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_0^\infty y^{2n+1} e^{-yy}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^n e^{-t}\,dt = \frac{1.2.3\ldots n}{2}$$

erinnert und man erhält daher durch Sonderung der Glieder vom geraden und ungeraden Index

41) $$\int_\mu^\beta f(z)\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\pi} f(\mu)\left\{A_1 + \frac{A_3}{2}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{A_5}{2.4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{A_7}{2.4.6}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots\right\}$$

$$+ \frac{1}{2} f(\mu)\left\{A_2 + \frac{A_4}{3}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{A_6}{3.5}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{A_8}{3.5.7}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots\cdots\right\}$$

wobei die Koeffizientenbestimmung nach der Formel 39. geschieht. Um ein Beispiel für diese Formel zu haben, sei

$$f(z) = (1 - z^2)^{s-\frac{1}{2}}$$

und darin s eine ganze positive Zahl, ferner $\mu = 0$ und $\beta = 1$, wodurch die Bedingungen erfüllt sind, dass $f(\mu)$ ein Maximum sei und $f(\beta)$ verschwinde. Der Werth des zu berechnenden Integrales ist dann unmittelbar bekannt, nämlich

42) $$\int_0^1 (1 - z^2)^{s-\frac{1}{2}}\,dz = \frac{1.3.5\ldots\ldots(2s-1)}{2.4.6\ldots(2s)} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{(s+1)\,(s+2)\,(s+3)\ldots(2s)}{1.2.3\ldots\ldots s} \cdot \frac{\pi}{2^{2s+1}} = (2s)_s \,\frac{\pi}{2^{2s+1}}$$

also abhängig von dem mittelsten Binomialkoeffizienten des Exponenten $2s$. Andererseits hat man nach Formel 39.

$$A_n = D^{n-1}\left\{\left(\frac{x}{\sqrt{-(s-\frac{1}{2})\,l(1-x^2)}}\right)^n\right\}_{(x=o)}$$

$$= \frac{1}{(s-\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}n}} \quad D^{n-1}\left\{(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{4}x^6+\ldots)^{-\frac{1}{2}n}\right\}$$

$$\text{für } x = 0$$

und hieraus geht hervor, dass A_n für jedes gerade n verschwindet und mithin in Nr. 41. nur die erste Reihe rechter Hand übrig bleibt. Nehmen wir $n = 2k + 1$, wo k eine beliebige ganze positive Zahl ist und setzen ferner den rein numerischen Betrag von

43) $$D^{2k}\left\{(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{4}x^6+\ldots)^{-(k+\frac{1}{2})}\right\}_{(x=o)} = P_{2k}$$

so ist

$$A_{2k+1} = \frac{P_{2k}}{(s-\frac{1}{2})^{k+\frac{1}{2}}} = \frac{P_{2k}}{(s-\frac{1}{2})^k\sqrt{s-\frac{1}{2}}}$$

und man findet nun aus der Formel 41.

$$\int_o^1 (1-z^2)^{s-\frac{1}{2}}\,dz$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{s-\frac{1}{2}}}\left\{P_0 + \frac{P_2}{2.(2s-1)} + \frac{P_4}{2.4.(2s-1)^2} + \ldots\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\,\sqrt{2s-1}}\left\{P_0 + \frac{P_2}{2.(2s-1)} + \frac{P_4}{2.4.(2s-1)^2} + \ldots\right\}$$

und durch Vergleichung mit dem schon bekannten Werthe des Integrales (42) ergiebt sich jetzt

44) $$\frac{(2s)_s}{2^{2s}} =$$

$$\sqrt{\frac{2}{(2s-1)\pi}}\left\{P_0 + \frac{P_2}{2.(2s-1)} + \frac{P_4}{2.4.(2s-1)^2} + \frac{P_6}{2.4.6.(2s-1)^3} + \ldots\ldots\right\}$$

und hier stellt die linke Seite das Verhältniss des mittelsten Gliedes der Entwickelung $(1+1)^{2s}$ zur ganzen Entwickelung dar. Man kann dieses Resultat direkt verifiziren, weil sich die Gleichung

45) $$(1-z^2)^{s-\frac{1}{2}} = e^{-yy}$$

unmittelbar in Beziehung auf z auflösen lässt; für $\frac{1}{s-\frac{1}{2}} = \alpha$ ist nämlich

$$z = \sqrt{(1-e^{-\alpha y^2})}$$

$$= \sqrt{\alpha}\cdot y\sqrt{1-\frac{1}{2}\alpha y^2 + \frac{1}{6}\alpha^2 y^4 - \ldots\ldots}$$

und hier lässt sich das Radikal, dem Binomischen Satze zufolge, in eine nach Potenzen von y fortschreitende Reihe verwandeln, weil der Ausdruck

$$\frac{1}{2}\alpha y^2 - \frac{1}{6}\alpha^2 y^4 + \frac{1}{24}\alpha^3 y^6 - \ldots = \frac{1-e^{-\alpha y^2}}{\alpha y^2}$$

niemals die Einheit überschreitet, wenn y das Intervall 0 bis ∞ durchläuft. Um aber die Koeffizienten jener Entwickelung rasch zu bestimmen, setzen wir mit *Laplace*

46) $$z = \sqrt{(1 - e^{-\alpha y^2})}$$

$$= \sqrt{\alpha} \cdot y(Q_0 + Q_2 \alpha y^2 + Q_4 \alpha^2 y^4 + Q^6 \alpha^3 y^6 + \ldots)$$

nehmen beiderseits die Logarithmen und differenziren in Beziehung auf y; es ergiebt sich so

$$\frac{\alpha y e^{-\alpha y^2}}{1 - e^{-\alpha y^2}} = \frac{Q_0 + 3 Q_2 \alpha y^2 + 5 Q_4 \alpha^2 y^4 + \ldots\ldots}{Q_0 y + Q_2 \alpha y^3 + Q_4 \alpha^2 y^5 + \ldots\ldots}$$

Hier kann man statt der auf der linken Seite vorkommenden Exponenzialgrösse die bekannte Reihe substituiren, nachher beide Seiten auf gleichen Nenner bringen und zuletzt die Koeffizienten gleicher Potenzen von y vergleichen. Die Ausführung dieser leichten Rechnung führt zu der Rekursionsformel:

47) $$0 = 2k \,.\, Q_{2k} - \frac{2k - 3}{1\,.\,2} Q_{2k-2} + \frac{2k - 6}{1\,.\,2\,.\,3} Q_{2k-4}$$

$$- \frac{2k - 9}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} Q_{2k-6} + \frac{2k - 12}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} Q_{2k-8} - \ldots\ldots$$

während $Q_0 = 1$ ist. Für $k = 1, 2, 3, \ldots$ lassen sich hieraus der Reihe nach die Werthe von Q_2, Q_4, Q_6 etc. bestimmen; man findet so ohne Mühe:

$$Q_0 = 1, \quad Q_2 = -\frac{1}{4}, \quad Q_4 = +\frac{5}{96}, \quad Q_6 = -\frac{3}{64}, \quad \ldots\ldots$$

Nachdem auf diese Weise die Werthe der mit Q bezeichneten Koeffizienten bekannt sind, ergiebt sich aus Nr. 46.

$$dz = \sqrt{\alpha}(Q_0 + 3 Q_2 \alpha y^2 + 5 Q_4 \alpha^2 y^4 + \ldots) dy$$

Vermöge dieser Gleichung und der unter Nr. 45. aufgestellten, ist

$$\int_0^1 (1 - z^2)^{s-1/2}\, dz$$

$$= \sqrt{\alpha} \int_0^\infty e^{-yy} (Q_0 + 3\, Q_2 \alpha y^2 + 5\, Q_4 \alpha^2 y^4 + \ldots)\, dy$$

Durch Ausführung der beiderseitigen Integrationen wird

$$\frac{(2s)_s}{2^{2s}}$$

$$= \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \left\{ Q_0 + \frac{1\,.\,3}{2} Q_2 \alpha + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2^2} Q_4 \alpha^2 + \ldots\ldots \right\}$$

endlich durch Restitution des Werthes von α

48)
$$\frac{(2s)_s}{2^{2s}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{(2s-1)\pi}} \left\{ Q_0 + \frac{1\,.\,3\,.\,Q_2}{2s-1} + \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,Q_4}{(2s-1)^2} + \ldots\ldots \right\}$$

was mit der unter Nr. 44. verzeichneten Gleichung identisch ist, wie man durch Vergleichung der beiderseitigen Reihenkoeffizienten finden wird.

§. 3.

Wir betrachten endlich den Fall, in welchem das Integral von $f(z)\, dz$ zwischen zwei Gränzen α und β genommen wird, an denen die Funktion $f(z)$ verschwindet und zwischen welchen sie ein einziges Maximum für $z = \mu$ erreicht. Es liegt übrigens keine Beschränkung in der Annahme, dass $f(\mu)$ ein Maximum sei, denn wenn $f(\mu)$ ein Minimum wäre, würde die Funktion $f(z)$ von $z = \alpha$ bis $z = \beta$ negativ sein und man könnte daher diesen Fall auf den vorigen reduziren, indem man

$$\int_\alpha^\beta f(z)\, dz = -\int_\alpha^\beta [-f(z)]\, dz$$

setzte. Zerlegen wir das Integrationsintervall α bis β in die beiden Theile α bis μ und μ bis β, so ist

$$\int_\alpha^\beta f(z)\,dz = \int_\alpha^\mu f(z)\,dz + \int_\mu^\beta f(z)\,dz$$

und hier setzen wir in dem ersten Integrale $z = \mu - x$, im zweiten $z = \mu + x$, wo x jedesmal eine neue Variable bezeichnet; es wird dann

$$\text{49)} \qquad \int_\alpha^\beta f(z)\,dz = \int_0^{\mu-\alpha} f(\mu - x)\,dx + \int_0^{\beta-\mu} f(\mu + x)\,dx$$

Die beiden Integrale rechter Hand sind ganz von der Form derer, welche wir im vorigen Paragraphen betrachtet haben. Die Funktion $f(\mu - z)$ erreicht nämlich für $x = 0$ ihr Maximum $f(\mu)$ und nimmt beständig ab, während x das Intervall $x = 0$ bis $x = \mu - \alpha$ durchläuft, bis sie für $x = \mu - \alpha$ verschwindet; ebenso wird im zweiten Integrale $f(\mu + x)$ zu einem Maximum für $x = 0$, nimmt ab von $x = 0$ bis $x = \beta - \mu$ und annullirt sich für $x = \beta - \mu$. Es sind daher auf jedes der genannten Integrale die Transformationen anwendbar, welche wir im vorigen Paragraphen gezeigt haben.

I. Es sei nun zunächst wie vorhin $F(y) = 1 - y^2$, so können folgende Entwickelungen vorgenommen werden. Es sei

$$\text{50)} \quad x = \grave{A}_0 + \frac{1}{1}\grave{A}_1 \sqrt{1 - \frac{f(\mu - x)}{f(\mu)}} + \frac{1}{2}\grave{A}_2 \sqrt{1 - \frac{f(\mu - x)}{f(\mu)}}^{\,2} + \dots\dots$$

so bestimmen sich die Koeffizienten, weil die Funktion rechter Hand für $x = 0$ verschwindet, mittelst der Formeln

$$\text{51)} \qquad \grave{A}_0 = 0\,,\ \grave{A}_n = D^{n-1}\left\{\left(\frac{x}{\sqrt{1 - \frac{f(\mu - x)}{f(\mu)}}}\right)^n\right\}_{(x=0)}$$

und es gilt die Gleichung 37. von $x = 0$ bis $x = \mu - \alpha$. Für $\mu - x = z$ folgt daraus, dass die Entwickelung

$$\mu - z = \frac{1}{1'} \grave{A}_1 \sqrt{1 - \frac{f(z)}{f(\mu)}} + \frac{1}{2'} \grave{A}_2 \sqrt{1 - \frac{f(z)}{f(\mu)}}^2 + \ldots\ldots$$

von $z = \mu$ bis $z = \alpha$ Gültigkeit besitzt; nehmen wir noch

$$52) \qquad \sqrt{1 - \frac{f(z)}{f(\mu)}} = y \text{ oder } f(z) = f(\mu)(1 - y^2)$$

so bestehen jetzt die Gleichungen

$$\mu - z = \frac{1}{1'} \grave{A}_1 y + \frac{1}{2'} \grave{A}_2 y^2 + \frac{1}{3'} \grave{A}_3 y^3 + \ldots$$

und

$$53) \qquad dz = -(\grave{A}_1 + \frac{1}{1'} \grave{A}_2 y + \frac{1}{2'} \grave{A}_3 y^2 + \ldots\ldots) dy$$

ebenfalls von $z = \mu$ bis $z = \alpha$, d. h. von $y = 0$ bis $y = -1$ und zwar muss es hier $y = -1$ heissen und nicht $+1$, weil die Grösse y zufolge der Gleichung 52. abnimmt, wenn man z von μ bis α gehen lässt, und mithin die bei Null anfangende Abnahme des y in das Gebiet des Negativen führen muss. Nach den für $f(z)$ und dz gemachten innerhalb der Gränzen $z = \mu$ bis $z = \alpha$ oder $y = 0$ bis $y = -1$ geltenden Substitutionen ist nun:

$$54) \qquad \int_\alpha^\mu f(z)\,dz$$

$$= -f(\mu) \int_{-1}^{0} (1 - y^2)(\grave{A}_1 + \frac{1}{1'} \grave{A}_2 y + \frac{1}{2'} \grave{A}_3 y^2 + \ldots\ldots) dy$$

was wir vor der Hand nicht weiter ausführen wollen.

Auf ganz ähnliche Weise erhellt, dass die Gleichung

$$x = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 \sqrt{1 - \frac{f(\mu + x)}{f(\mu)}} + \frac{1}{2'} A_2 \sqrt{1 - \frac{f(\mu + x)}{f(\mu)}}^2 + \ldots$$

worin die Koefficienten nach den Formeln

$$55) \qquad A_0 = 0, \; A_n = D^{n-1} \left(\left[\frac{x}{\sqrt{1 - \frac{f(\mu + x)}{f(\mu)}}} \right]^n \right)_{(x=0)}$$

zu bestimmen sind, von $x = 0$ bis $x = \beta - \mu$ gilt und dass mithin die folgende

$$z - \mu = \frac{1}{1'} A_1 \sqrt{1 - \frac{f(z)}{f(\mu)}} + \frac{1}{2'} A_2 \sqrt{1 - \frac{f(z)}{f(\mu)}}^2 + \ldots\ldots\ldots$$

für alle z von $z = \mu$ bis $z = \beta$ richtig bleibt. Nehmen wir

$$56) \qquad \sqrt{1 - \frac{f(z)}{f(\mu)}} = y, \quad \text{oder } f(z) = f(\mu)(1 - y^2)$$

so gelten jetzt die Gleichungen

$$z - \mu = \frac{1}{1'} A_1 y + \frac{1}{2'} A_2 y^2 + \frac{1}{3'} A_3 y^3 + \ldots$$

und

$$57) \qquad dz = (A_1 + \frac{1}{1'} A_2 y + \frac{1}{2'} A_3 y^2 + \ldots.) \, dy$$

ebenfalls von $z = \mu$ bis $z = \beta$, d. h. von $y = 0$ bis $y = +1$. Nach den Substitutionen 56. und 57. ist nun

$$58) \qquad \int_\mu^\beta f(z) \, dz$$

$$= f(\mu) \int_0^1 (1 - y^2) \, (A_1 + \frac{1}{1'} A_2 y + \frac{1}{2'} A_3 y^2 + \ldots.) \, dy$$

Durch Addition der Gleichungen 41. und 45. würde man zu einer Doppelreihe für das Integral

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)\,dz$$

gelangen, die sich aber leicht vermeiden lässt, wenn man die Werthe von $\grave{A}_n$ und A_n vergleicht. Durch Einführung einer neuen Variabeln $x' = - x$ erkennt man nämlich sehr leicht, dass $\grave{A}_n = - A_n$ ist und mithin statt der Gleichung 41. die folgende geschrieben werden kann:

$$\int_{\alpha}^{\mu} f(z)\,dz$$

$$= f(\mu) \int_{-1}^{0} (1 - y^2)\,(A_1 + \frac{1}{1'} A_2 y + \frac{1}{2'} A_3 y^2 + \ldots)\,dy$$

Vereinigt man diese Gleichung mit der vorhergehenden, so ergiebt sich sogleich

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)\,dz$$

$$= f(\mu) \int_{-1}^{+1} (1 - y^2)\,(A_1 + \frac{1}{1'} A_2 y + \frac{1}{2'} A_3 y^2 + \ldots)\,dy$$

und durch Ausführung der einzelnen Integrationen, wobei alle Integrale verschwinden, in denen ungerade Potenzen von y vorkommen:

$$59) \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(z)\,dz = 4 f(\mu) \left\{ \frac{A_1}{1'.3} + \frac{A_3}{3'.5} + \frac{A_5}{5'.7} + \ldots . \right\}$$

II. Ganz analog sind die Entwickelungen für den Fall $F(y) = e^{-yy}$. Zunächst erhellt nämlich sehr leicht, dass die Gleichung

$$60)\quad x = \grave{A}_0 + \frac{1}{1'}\grave{A}_1\sqrt{lf(\mu) - lf(\mu - x)}$$

$$+ \frac{1}{2'}\grave{A}_2\sqrt{lf(\mu) - lf(\mu - x)}^2 + \ldots\ldots$$

von $x = 0$ bis $x = \mu - \alpha$ gilt, weil die Funktion $\sqrt{lf(\mu) - lf(\mu - x)}$ für $x = 0$ verschwindet und von da ab wächst, bis sie für $x = \mu - \alpha$ ihr reelles Maximum erreicht. Die Koeffizientenbestimmung geschieht daher mittelst der Formeln

$$61)\quad \grave{A} = 0, \quad \grave{A} = D^{n-1}\left\{\left(\frac{x}{\sqrt{lf(\mu) - lf(\mu - x)}}\right)^n\right\}_{(x=0)}$$

Es folgt weiter für $\mu - x = z$, dass die Reihe

$$\mu - z = \frac{1}{1'}\grave{A}_1\sqrt{lf(\mu) - lf(z)} + \frac{1}{2'}\grave{A}_2\sqrt{lf(\mu) - lf(z)}^2 + \ldots$$

von $z = \mu$ bis $z = \alpha$ richtig bleibt und dass ferner, wenn

$$62)\quad \sqrt{lf(\mu) - lf(z)} = y \text{ oder } f(z) = f(\mu)e^{-yy}$$

gesetzt wird, die Gleichungen

$$\mu - z = \frac{1}{1'}\grave{A}_1 y + \frac{1}{2'}\grave{A}_2 y^2 + \frac{1}{3'}\grave{A}_3 y^3 + \ldots\ldots$$

und

$$63)\quad dz = -\left(\grave{A}_1 + \frac{1}{1'}\grave{A}_2 y + \frac{1}{2'}\grave{A}_3 y^2 + \ldots\right)dy$$

ebenfalls von $z = \mu$ bis $z = \alpha$, d. h. von $y = 0$ bis $y = -\infty$ richtig bleiben. Nach diesen Bemerkungen wird

$$64)\quad \int_\alpha^\mu f(z)\,dz$$

$$= -f(\mu)\int_{-\infty}^{0} e^{-yy}\left(\grave{A}_1 + \frac{1}{1'}\grave{A}_2 y + \frac{1}{2'}\grave{A}_3 y^2 + \ldots\right)dy$$

Wiederholen wir ganz ähnliche Schlüsse in Beziehung auf die Reihe

$$x = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 \sqrt{lf(\mu) - lf(\mu + x)}$$
$$+ \frac{1}{2'} A_2 \sqrt{lf(\mu) - lf(\mu + x)}^2 + \ldots\ldots$$

so zeigt sich, dass sie von $x = 0$ bis $x = \beta - \mu$ gilt, wobei die Koeffizienten A nach den Formeln

65) $$A_0 = 0, \; A_n = D^{n-1} \left\{ \left(\frac{x}{\sqrt{lf(\mu) - lf(\mu + x)}} \right)^n \right\}_{(x = 0)}$$

bestimmt werden müssen. Für $\mu + x = z$ folgt weiter die Gültigkeit der Reihe

$$z - \mu = \frac{1}{1'} A_1 \sqrt{lf(\mu) - lf(z)} + \frac{1}{2'} A_2 \sqrt{lf(\mu) - lf(z)}^2 + \ldots$$

innerhalb der Gränzen $z = \mu$ bis $z = \beta$. Nehmen wir weiter

66) $$\sqrt{lf(\mu) - lf(z)} = y, \text{ also } f(z) = f(\mu) e^{-yy}$$

so bleiben die neuen Gleichungen

$$z - \mu = \frac{1}{1'} A_1 y + \frac{1}{2'} A_2 y^2 + \frac{1}{3'} A_3 y^3 + \ldots$$

und

67) $$dz = (A_1 + \frac{1}{1'} A_2 y + \frac{1}{2'} A_3 y^2 + \ldots) \, dy$$

von $z = \mu$ bis $z = \beta$, d. h. von $y = 0$ bis $y = + \infty$ richtig und wir haben daher vermöge der Substitutionen 66. und 67.

68) $$\int_\mu^\beta f(z) \, dz$$
$$= f(\mu) \int_0^\infty e^{-yy} (A_1 + \frac{1}{1'} A_2 y + \frac{1}{2'} A_3 y^2 + \ldots) \, dy$$

Die Vereinigung der Gleichungen 64. und 68. würde jetzt eine Doppelreihe für das zwischen den Gränzen α und β genommene Integral von $f(z)\,dz$ resultiren. Zufolge der Bemerkung, dass $\overset{\backprime}{A}_n = -A_n$ ist, welche man leicht durch die Substitution $x = -x'$ verifiziren wird, kann man aber statt der Gleichung 64. die folgende schreiben

$$\int_\alpha^\mu f(z)\,dz$$

$$= f(\mu) \int_{-\infty}^{o} e^{-yy} \left(A_1 + \frac{1}{1'} A_2 y + \frac{1}{2'} A_3 y^2 + \ldots\right) dy$$

aus deren Vereinigung mit Nr. 68. die nachstehende hervorgeht:

$$\int_\alpha^\beta f(z)\,dz$$

$$= f(\mu) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-yy} \left(A_1 + \frac{1}{1'} A_2 y + \frac{1}{2'} A_3 y^2 + \ldots\right) dy$$

Bei Ausführung der einzelnen Integrationen verschwinden alle Glieder, welche ungerade Potenzen von y enthalten und es bleibt:

$$\textbf{69)} \quad \int_\alpha^\beta f(z)\,dz = \sqrt{\pi}\, f(\mu) \left\{A_1 + \frac{A_3}{1'}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{A_5}{2'}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots\right\}$$

wobei das allgemeine Glied der eingeklammerten Reihe durch

$$\frac{A_{2m+1}}{m'}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}$$

dargestellt wird und für die Koeffizientenbestimmung die Formel 65. zu benutzen ist.

Ein ebenso wichtiges als interessantes Beispiel hierzu bildet die numerische Berechnung des Integrales

$$\int_o^\infty e^\mu z^{-z}\,dz = \Pi(\mu) = \Gamma(\mu + 1)$$

wobei die erste Bezeichnung rechter Hand von *Gauss* und die zweite von *Legendre* eingeführt worden ist. Die Funktion $z^\mu e^{-z}$ verschwindet nämlich sowohl für $z = 0$ als für $z = \infty$, wenn nur μ eine positive Grösse ist, und sie hat zwischen diesen Gränzen ein einziges Maximum, welches für $z = \mu$ eintritt, so dass $f(\mu) = \mu e^{-\mu} = \left(\frac{\mu}{e}\right)^\mu$ ist. Die Formel 65. giebt

$$A_n = D^{n-1}\left\{\left(\frac{x}{\sqrt{x - \mu\, l(1 + \frac{x}{\mu})}}\right)^n\right\}_{(x = a)}$$

oder für $x = \mu u$, wo u eine neue Variable bezeichnet

$$A_n = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^n}}\, D^{n-1}\left\{\left(\frac{u}{\sqrt{u - l(1 + u)}}\right)^n\right\}_{(u = o)}$$

Da wir nur ungerade Werthe von n in Anspruch nehmen, so setzen wir $n = 2m + 1$ und haben dann bei Entwickelung von $u - l(1 + u)$

$$A_{2m+1} = \frac{\sqrt{\mu}}{\mu^n}\, D^{2m}\left\{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}u + \frac{1}{4}u_2 - \ldots\right)^{-(m + 1/2)}\right\}_{(u = o)}$$

oder auch

$$70)\quad A_{2m+1} = \frac{\sqrt{2\mu}}{\mu^n}.2^m\, D^{2m}\left\{\left(1 - \frac{2}{3}u + \frac{2}{4}u^2 - \ldots\right)^{-(m+1/2)}\right\}_{(u = o)}$$

Hiernach findet man für $m = 0, 1, 2, 3$ etc. der Reihe nach

$$A_1 = \sqrt{2\mu},\ A_3 = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{2\mu}}{\mu},\ A_5 = \frac{1}{9}\frac{\sqrt{2\mu}}{\mu^2}$$

$$A_7 = -\frac{139}{135}\frac{\sqrt{2\mu}}{\mu^3},\ A_9 = -\frac{571}{405}\frac{\sqrt{2\mu}}{\mu^4},\quad \text{u. s. w.}$$

und so ergiebt sich aus der Gleichung 69. die Formel

$$\textbf{71)} \qquad \int_0^\infty z^\mu e^{-z} dz = \Pi(\mu) = \Gamma(\mu + 1)$$

$$= \sqrt{2\mu\pi}\left(\frac{\mu}{e}\right)^\mu \left\{1 + \frac{1}{12.\mu} + \frac{1}{288.\mu^2} - \frac{139}{51840.\mu^3} - \frac{571}{2488320.\mu^4} - \ldots\right\}$$

wobei die eingeklammerte Reihe, der man auch die Form

$$1 + \frac{1}{12\mu} + \frac{1}{2(12\mu)^2} - \frac{139}{30(12\mu)^2} - \frac{571}{120\,(12\mu)^4} - \ldots\ldots$$

geben kann, ausserordentlich stark konvergirt, sobald μ eine irgend beträchtliche Grösse hat. Da nach einer sehr bekannten Relation

$$\frac{\Pi(\mu + n)}{\Pi(\mu)} = \frac{\Gamma(\mu + 1 + n)}{\Gamma(\mu + 1)} = (\mu + 1)\,(\mu + 2)\,\ldots\,(\mu + n)$$

ist, so erhellt, dass die Formel 71. auch zur Berechnung von Faktoriellen angewendet werden kann, indem man $\mu + n$ an die Stelle von μ treten lässt und das so erhaltene Resultat durch das obige dividirt.

Wir schliessen diesen Aufsatz mit der Bemerkung, dass in ihm hinreichend die Mittel angedeutet sind, um überhaupt jedes bestimmte Integral näherungsweise zu berechnen; denn wenn auch die Integrationsgränzen desselben nicht den drei von uns gemachten Voraussetzungen entsprechen, so kann man das gegebene Integral doch immer in eine Reihe anderer Integrale zerlegen, deren Gränzen unter eine der obigen drei Kategorieen fallen.

IV.

Ueber ein Doppelintegral mit zwei willkührlichen Funktionen.

---

*

Die allgemeine Form aller zwischen bestimmten Gränzen genommenen Doppelintegrale ist bekanntlich

$$\int_a^b dx \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x, y)\, dy$$

und man hat hier zuerst in Beziehung auf y zu integriren, wobei x als konstante Grösse figurirt, dann für y die Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zu substituiren und nach geschehener Subtraktion die auf x bezügliche Integration zwischen den Gränzen $x = b$, $x = a$ zu bewerkstelligen. Erinnert man sich an die bekannte Zerlegungsformel

$$\int_\alpha^\beta F(z)\, dz = \int_0^\beta F(z)\, dz - \int_0^\alpha F(z)\, dz$$

so kann man das obige Integral zuerst in die beiden nachstehenden

$$\int_a^b dx \int_0^{\varphi(x)} f(x, y)\, dy - \int_a^b dx \int_0^{\psi(x)} f(x, y)\, dy$$

zerfallen, die unter Anwendung desselben Prinzipes in die folgenden vier auseinander gehen

$$\int_0^b dx \int_0^{\varphi(x)} f(x, y)\, dy - \int_0^a dx \int_0^{\varphi(x)} f(x, y)\, dy$$

$$- \left[\int_0^b dx \int_0^{\psi(x)} f(x, y)\, dy - \int_0^a dx \int_0^{\psi(x)} f(x, y)\, dy\right].$$

Es würde also nur darauf ankommen, den Werth eines Integrales von der Form

$$\int_0^c dx \int_0^{\varphi(x)} f(x, \mu)\, dy$$

zu ermitteln und man deshalb das vorstehende Integral als das einfachere Schema der bestimmten Doppelintegrale ansehen.

Eine allgemeine Formel, nach welcher sich die hier postulirte zweifache Integration auf eine einfache (Quadratur) zurückführen liesse, existirt bekanntlich nicht; dagegen ist aber diese Reduktion sehr leicht, wenn die Funktion $f(x, y)$ nur von y abhängt, mithin das fragliche Integral, dessen Werth S heissen möge, unter der Form steht:

1) $$S = \int_0^c dx \int_0^{\varphi(x)} f(y)\, dy$$

Diese Reduktion scheint um so bemerkenswerther, als sie mit ganz elementaren Mitteln ausgeführt werden kann und, unter einem der Mechanik entnommenen Gesichtspunkte betrachtet, zu den eleganten Resultaten der Abhandlung VI. von selbst hinleitet.

Setzen wir zunächst $y = \varphi(x)t$, wo t die neue Variable bezeichnet und $\varphi(x)$ als konstanter Faktor dient, so wird $dy = \varphi(x)\,dt$ und den Integrationsgränzen $y = \varphi(x)$, $y = 0$ entsprechen jetzt die auf t bezüglichen neuen Gränzen $t = 1$, $t = 0$; hierdurch verwandelt sich die Gleichung 1. in

2) $$S = \int_0^c \varphi(x)\, dx \int_0^1 f[\varphi(x)t]\, dt$$

Führen wir ferner eine neue Variable u dadurch ein, dass wir $\varphi(x) = u$ setzen, so folgt hieraus zunächst, dass umgekehrt x eine gewisse Funktion von u etwa $x = \psi(u)$ ist, und bekanntlich

heissen hier φ und ψ die Umkehrungen von einander; weiter ist nun $dx = \psi'(u)\,du$ und wenn noch die Gränzen $x = c$, $x = 0$ in die Gleichung $\varphi(x) = u$ eingesetzt werden, so erhält u die entsprechenden Werthe $\varphi(c)$ und $\varphi(o)$. Nach diesen Bemerkungen wird jetzt

$$3)\qquad S = \int_{\varphi(o)}^{\varphi(c)} u\,\psi'(u)\,du \int_o^1 f(ut)\,dt$$

Setzen wir weiter das unbestimmte Integral

$$4)\qquad \int f(z)\,dz = F(z) + Const.$$

also

$$5)\qquad f(z) = F'(z)$$

so folgt aus Nr. 4., wenn wir ut an die Stelle von z treten lassen und t als variabel u dagegen als konstant ansehen

$$u\int f(ut)\,dt = F(ut) + Const.$$

und durch Einführung hiervon wird aus Nr. 3.

$$6)\qquad S = \int_{\varphi(o)}^{\varphi(c)} \psi'(u)\,du \left\{F(u) - F(o)\right\}$$

Auf dieses Integral wenden wir die bekannte Formel der partiellen Integration an:

$$\int U\,V du = U\int V du - \int d\,U \int V du$$

indem wir $U = F(u) - F(o)$ und $V = \psi'(u)$ setzen; es wird dann bei unbestimmter Integration

$$\int \left\{F(u) - F(o)\right\} \psi'(u)\,du$$

$$= \left\{F(u) - F(u)\right\} \psi(u) - \int F'(u)\,du\,\psi(u)$$

und durch Einführung der Integrationsgränzen $u = \varphi(c)$, $u = \varphi(o)$

$$7)\quad S = \Big\{F[\varphi(c)] - F(o)\Big\}\,\psi[\varphi(c)] - \Big\{F[\varphi(o)] - F(o)\Big\}\,\psi[\varphi(o)]$$

$$- \int_{\varphi(o)}^{\varphi(c)} F'(u)\,\psi(u)\,du$$

Dabei ist zu berücksichtigen, dass aus den Gleichungen

$$\varphi(x) = a, \quad x = \psi(u)$$

sogleich folgt

$$\psi[\varphi(x)] = \psi(u) = x$$

so dass sich also die beiden entgegengesetzten Funktionen ψ und φ aufheben; nach dieser Bemerkung nimmt die Gleichung 7. die einfachere Form an

$$8)\quad S = \Big\{F[\varphi(c)] - F(o)\Big\}\,c - \int_{\varphi(o)}^{\varphi(c)} F'(u)\,\psi(u)\,du$$

Endlich ist noch zu erinnern, dass nach Nr. 5. $F'(u) = f(u)$ und zufolge von Nr. 4. und nach einer Definition des bestimmten Integrales überhaupt

$$F(\gamma) - F(o) = \int_o^{\gamma} f(z)\,dz$$

sein muss; wenden wir diess für $\gamma = \varphi(c)$ auf die achte Formel an, so ist endlich

$$9)\quad S = c\int_o^{\varphi(c)} f(z)\,dz - \int_{\varphi(o)}^{\varphi(c)} f(u)\,\psi(u)\,du$$

Hier setzen wir für S seine ursprüngliche Bedeutung, schreiben der Gleichförmigkeit wegen y für u und z und gelangen so zu der Reduktionsformel

10) $$\int_o^c dx \int_o^{\varphi(c)} f(y)\, dy$$

$$= c \int_o^{\varphi(c)} f(y)\, dy - \int_{\varphi(o)}^{\varphi(c)} f(y)\, \psi(y)\, dy$$

durch welche die postulirte doppelte Integration auf die Differenz zweier einfachen Integrale und auf die Umkehrung der Funktion $\varphi(x) = y$ zurückgeführt wird.

Es ist vielleicht nicht ohne Interesse eine geometrische Anwendung der obigen allgemeinen Formel zu sehen. Denken wir uns x, y, z als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes im Raume, so wird durch die Gleichung

11) $$z = Ax + F(y)$$

worin $F(y)$ eine beliebige Funktion bezeichnet, eine cylindrische Fläche charakterisirt, wie man sogleich aus dem Umstande ersieht, dass für ein konstantes $y = k$ die Gleichung der geraden Linie zum Vorschein kommt und folglich die Fläche von allen der Koordinatenebene xz parallelen Ebenen in Geraden geschnitten wird, welche sämmtlich parallel laufen und mit der Ebene xy einen Winkel bilden, dessen trigonometrische Tangente $= A$ ist. Wenden wir auf diese Fläche die bekannte Komplanationsformel an

$$S = \int dx \int dy \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

so haben wir $\left(\frac{dz}{dx}\right) = A$, $\left(\frac{dz}{dy}\right) = F'(y)$ und mithin

$$S = \int dx \int dy \sqrt{1 + A^2 + \left\{F'(y)\right\}^2}$$

oder einfacher

12) $$S = \int dx \int dy f(y)$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird

13) $$f(y) = \sqrt{1 + A^2 + \left\{F'(y)\right\}^2}$$

Hier sind nun die für x und y geltenden Integrationsgränzen zu bestimmen und diess soll auf folgende Weise geschehen. Auf der Koordinatenebene xy (Fig. 3.) ziehen wir in der Entfernung $OC = c$ eine Parallele zur Achse der y, ferner eine beliebige Kurve, welche CD schneidet, und durch die Gleichung $y' = \varphi(x')$ charakterisirt werden möge, und setzen nun voraus, dass die Grösse desjenigen Theiles $TUVW$ der Cylinderfläche bestimmt werden soll, wovon das theilweis krummlinig begränzte Viereck $OCDL$ die Horizontalprojektion bildet. Sind nun $OM = x$, $MN = y$ und $NP = z$ die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes P der Fläche, so steht dem x der Spielraum von Null bis $OC = c$ frei, ferner dem y der Spielraum von Null bis $MQ = \varphi(OM) = \varphi(x)$, d. h. 0 und c sind die Gränzen für x, 0 und $\varphi(x)$ die für y, womit die Gleichung 12., in welcher nunmehr $S = TUVW$ ist, völlig mit der Gleichung 1. zusammenfallt. Schreiben wir die Gleichung 9. in der Form

14) $$S = \int_0^{\varphi(c)} c f(\xi)\, d\xi - \int_{\varphi(o)}^{\varphi(c)} f(\xi)\psi(\xi)\, d\xi$$

so bedeutet diess geometrisch, dass die doppelt gekrümmte cylindrische Fläche jederzeit als die Differenz zweier ebenen Flächen betrachtet werden kann, von welchen die erste über der Abscisse $\varphi(c)$ steht in eine Kurve, deren Gleichung zwischen rechtwinkligen Koordinaten $\eta = cf(\xi)$ ist, und die zweite die Strecke $\varphi(c) - \varphi(o)$ der Abscissenachse zur Basis hat und oberhalb durch eine Kurve begränzt wird, deren Gleichung $\eta = f(\xi)\psi(\xi)$ heisst. Nehmen wir z. B.

$$z = Ax + By^2$$

$$c = r,\ \varphi(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

so ist der Cylinder ein parabolischer und die Projektion $OCDL$ ein Quadrant des mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreises; es wird dann

$$f(y) = \sqrt{1 + A^2 + 4B^2y^2}$$

ferner folgt aus $\sqrt{r^2 - x^2} = y$ umgekehrt

$$x = \psi(y) = \sqrt{r^2 - y^2}$$

und aus Nr. 14.

$$S = \int_o^o r\sqrt{1 + A^2 + 4B^2\xi^2}\,d\xi$$

$$- \int_r^o \sqrt{1 + A^2 + 4B^2\xi^2}\ \sqrt{r^2 - \xi^2}\,d\xi$$

Hier verschwindet das erste Integral wegen der gleichen Integrationsgränzen, im zweiten Integrale giebt die Vertauschung der Gränzen

$$S = \int_o^r \sqrt{(1 + A^2 + 4B^2\xi^2)(r^2 - \xi^2)}\,d\xi$$

und hier ist demnach S gleich der ebenen Fläche, welche über der Abscisse r stände, wenn man sich die durch die Gleichung

$$\eta = \sqrt{(1 + A^2 + 4B^2\xi^2)(r^2 - \xi^2)}$$

charakterisirte Kurve gezeichnet denkt.

Für ein zweites Beispiel nehmen wir

$$z = Ax + \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - y^2}$$

$$c = a,\ \varphi(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$$

so ist der Cylinder ein elliptischer und die Projektion des zu komplanirenden Flächenstückes ein Quadrant mit dem Halbmesser a. In diesem Falle haben wir

$$f(y) = \sqrt{1 + A^2 + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y^2}{a^2 - y^2}}$$

$$= \sqrt{A^2 + \frac{a^4 - (a^2 - b^2)\, y}{a^2(a^2 - y^2)}}$$

und durch Einführung der numerischen Excentricität $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{a}$

$$f(y) = \sqrt{A^2 + \frac{a^2 - \varepsilon^2 y^2}{a^2 - y^2}} = \sqrt{\frac{(A^2 + 1)a^2 - (A^2 + \varepsilon^2)\, y^2}{a^2 - y^2}}$$

ferner folgt aus $\varphi(x) = \sqrt{a^2 - x^2} = y$ umgekehrt

$$x = \psi(y) = \sqrt{a^2 - y^2}$$

Die Formel 14. giebt jetzt

$$S = \int_0^a \sqrt{(A^2 + 1)a^2 - (A^2 + \varepsilon^2)\, \xi^2}\, d\xi$$

was sich bekanntlich mit leichter Mühe integriren lässt und insofern eine nette Bedeutung hat, als

$$\eta = \sqrt{(A^2 + 1)a^2 - (A^2 + \varepsilon^2)\, \xi^2}$$

wiederum die Gleichung einer Ellipse ist.

V.

Ueber die Bestimmung der Masse bei ungleichförmiger Dichtigkeit.

Für einen durchaus homogenen Körper hat die Massenbestimmung keine grösseren Schwierigkeiten als die Kubatur, weil hier die bekannte Regel der Mechanik gilt, dass die Masse dem Produkte aus Dichtigkeit und Volumen gleich ist; anders dagegen wird die Sache, wenn die Dichtigkeit im Innern des Körpers nicht überall dieselbe bleibt, sondern sich von Punkt zu Punkt nach einem vorgeschriebenen Gesetze ändert. Nennen wir x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten eines im Innern des Körpers liegenden Punktes und sehen wir die an dieser Stelle vorhandene Dichtigkeit als Funktion der drei Koordinaten an, so wird die Masse des im Punkte xyz befindlichen Körperelementes durch ein Produkt von der Form $\Delta(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ dargestellt, worin $\Delta(x, y, z)$ eine gegebene Funktion von x, y, z (die Dichtigkeit) bezeichnet. Die Gesammtmasse des Körpers ist demnach gleich dem dreifachen Integrale

$$1)\qquad \iiint \Delta(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

wobei die Integrationen so zu leiten sind, dass sie sich nur auf die im Inneren des Körpers liegenden Punkte erstrecken. Für eine mit dem Halbmesser r beschriebene Kugel, z. B. würden die vorstehenden Integrationen nur auf diejenigen positiven und negativen x, y, z zu beziehen sein, welche der Bedingung

$$2)\qquad r^2 \geqq x^2 + y^2 + z^2 \geqq 0$$

Genüge leisten und aus dieser Bemerkung leitet man ohne Mühe die Integrationsgränzen ab:

$$z = -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \text{ bis } z = +\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

$$y = -\sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{,,} \quad y = +\sqrt{r^2 - x^2}$$

$$x = -r \quad \text{,,} \quad x = +r$$

aus welchen noch hervorgeht, dass die in Nr. 1. postulirten Integrationen nicht in beliebiger Ordnung vorgenommen werden dürfen, sondern dass man bei der auf z bezüglichen Integration anzufangen und mit der für x geltenden aufzuhören hat.

Will man statt rechtwinkliger Koordinaten sich lieber der Polarkoordinaten bedienen, was allerdings in vielen Fällen bequemer ist, so nehme man in Fig. 4. OX, OY und OZ als Achsen der x, y, z, ferner $OM = x$, $MN = y$, $NP = z$ als rechtwinklige und $OP = \varrho$, $\angle POX = \vartheta$ und $\angle PMN = \omega$ als polare Koordinaten des Punktes P; das Volumen des im Punkte P befindlichen Körperelementes ist dann $PU \,.\, PV \,.\, PW$ und dabei

$$PU = d\varrho, \quad PV = \varrho\, d\vartheta, \quad PW = PM\, d\omega = \varrho \sin\vartheta\, d\omega$$

mithin das Volumen des in Rede stehenden Körperelementes

$$\varrho^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varrho\, d\omega$$

und wenn wir die im Punkte P stattfindende Dichtigkeit durch $\Delta(\varrho, \vartheta, \omega)$ bezeichnen, so ist die Masse des Körpers

$$3) \qquad \iiint \Delta(\varrho, \vartheta, \omega)\, \varrho^2 \sin\vartheta\, d\varrho\, d\vartheta\, d\omega$$

Die Integrationsgränzen sind hier wieder durch die Bemerkung zu bestimmen, dass nur solche Elemente, welche im Innern des Körpers liegen, in Rechnung gebracht werden dürfen. Hierzu ist vor Allem nöthig, dass man die in rechtwinkligen Koordinaten

gegebene Gleichung der Körperoberfläche in Polarkoordinaten ausdrücke, was mittelst der Formeln

$$4)\quad \begin{cases} x = r\cos\vartheta \\ y = r\sin\vartheta\cos\omega \\ z = r\sin\vartheta\sin\omega \end{cases}$$

keine Schwierigkeiten hat, und aus der neuen Gleichung zwischen ϱ, ϑ und ω die Gränzen bestimme, zwischen denen ϱ, ϑ und ω bleiben müssen, wenn P nicht ausserhalb des Körpers fallen soll.

Aus diesen Andeutungen erhellt, dass die Aufgabe von der Massenbestimmung eines Körpers von ungleicher Dichtigkeit jederzeit drei Integrationen erfordert, bei welchen im Allgemeinen zwei willkührliche Funktionen der drei Koordinaten vorkommen; die eine dieser Funktionen bestimmt das Gesetz der Dichtigkeitsänderung von Punkt zu Punkt, die andere charakterisirt die Oberfläche des in Rede stehenden Körpers. — Es bedarf wohl kaum der besonderen Erwähnung, dass sich die genannten Rechnungsoperationen in völliger Allgemeinheit, d. h. ohne wenigstens eine jener Funktionen zu spezialisiren, nicht ausführen lassen, dagegen ist es aber sehr bemerkenswerth, dass die obige dreifache Integration in der That effektuirt werden kann, wenn der Körper von einer Cylinder- oder von einer Rotationsfläche begränzt wird und wenn man ausserdem voraussetzt, dass sich die Dichtigkeit nicht von Punkt zu Punkt, sondern von Schicht zu Schicht ändere. Die vollständigen Entwickelungen für diese Fälle sind folgende.

Massenbestimmung von Cylindern.

Die Achse der z legen wir parallel zur Mantelfläche des Cylinders, die Koordinatenebene xy senkrecht darauf; letztere durchschneidet den Cylinder in einer Kurve (der Leitlinie), in welcher zur Abscisse x die Ordinate $\varphi(x)$ gehören möge, so dass für $OM = x$, $MQ = \varphi(x)$ ist. (Fig. 5.) Nennen wir ferner g

die Strecke OA, in deren Endpunkte A die Leitlinie die Achse der x durchschneidet und h die Höhe NH des Cylinders, so gelten für die Koordinaten $OM = x$, $MN = y$, $NP = z$ eines im Inneren des Körpers liegenden Punktes P folgende Gränzbestimmungen. Dem x steht der Spielraum von $x = 0$ bis $x = OA = g$ offen, dem y das Intervall $y = 0$ bis $y = MN = \varphi(x)$, dem z endlich der Spielraum von $z = 0$ bis $z = NH = h$ zu. Demnach sind $x = 0$, $x = g$, $y = 0$, $y = \varphi(x)$, $z = 0$, $z = h$ die Integrationsgränzen für die nachherige dreifache Integration. Lassen wir nun die Dichtigkeit von Schicht zu Schicht wechseln, so besteht der Körper gewissermaassen aus einer Folge unendlich dünner Lamellen, von denen jede für sich homogen ist, während von einer Lamelle zur anderen eine Dichtigkeitsänderung eintritt. Ueber die Lage dieser Lamellen können natürlich die verschiedenartigsten Voraussetzungen gemacht werden; wir betrachten von diesen aber nur zwei, indem wir annehmen, dass die Lamellen entweder senkrecht auf dem Mantel des Cylinders stehen, oder ihm parallel laufen.

I. Bei senkrecht auf dem Cylindermantel stehenden Lamellen ist die Dichtigkeit für alle Punkte einer zu xy parallelen Ebene dieselbe und hängt also nur von der Höhe der Ebene über der Koordinatenebene xy ab, d. h. die Dichtigkeit ist eine Funktion von z allein etwa $\Delta(z)$. Die Masse des im Punkte P befindlichen Körperelementes wird demnach durch $\Delta(z)\,dx\,dy\,dz$ ausgedrückt und die Masse des Cylinders, welche M heissen möge, ist zufolge der vorhin bereits ermittelten Integrationsgränzen:

$$M = \int_0^g \int_0^{\varphi(x)} \int_0^h \Delta(z)\,dx\,dy\,dz$$

oder

$$5) \qquad M = \int_0^g dx \int_0^{\varphi(x)} dy \int_0^h \Delta(z)\,dz$$

Hier ist der Werth des auf z bezüglichen Integrales von x und y unabhängig, spielt also rücksichtlich der nachfolgenden Integrationen die Stelle einer Konstante, so dass man auch schreiben kann

$$M = \left[\int_0^g dx \int_0^{\varphi(x)} dx\right] \cdot \left[\int_0^h \varDelta(z)\, dz\right]$$

oder, indem man die auf y bezügliche Integration ausführt

$$6)\qquad M = \left[\int_0^g \varphi(x)\, dx\right] \cdot \left[\int_0^h \varDelta(z)\, dz\right]$$

Es ist sehr leicht, den einfachen Sinn dieser Gleichung zu finden, wenn man die Formel 5. erst einmal auf den Fall eines aus den drei Kanten a, b, c konstruirten rechtwinkligen Parallelopipedes anwendet; man hat dann $g = a$, $\varphi(x) = b$, $h = c$ also für die Masse des Parallelopipedes:

$$\int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c \varDelta(z)\, dz = ab \int_0^c \varDelta(z)\, dz$$

Berücksichtigt man weiter, dass der erste Faktor in Nr. 6. die Grundfläche des Cylinders ausdrückt, so sagt die Formel 6., dass die gesuchte Cylindermasse gleich der Masse eines Parallelopipedes ist, welches mit dem Cylinder gleiche Grundfläche und gleiche Höhe besitzt und in welchem sich die Dichtigkeit nach demselben Gesetze ändert.

II. Wenn zweitens die Lamellen dem Mantel des Kegels parallel laufen, so ist die Dichtigkeit für alle diejenigen Punkte dieselbe, welche sich in einer parallel zur Achse der z gelegten Ebene befinden; nehmen wir diese Ebene parallel der Kordinatenebene xz, wie es die Figur zeigt, so hängt die Dichtigkeit im Punkte xyz nur von y ab und wäre demnach mit $\varDelta(y)$ zu bezeichnen. Aus der Integration des Produktes $\varDelta(y) dx\, dy\, dz$ entspringt jetzt die Formel

$$M = \int_0^g dx \int_0^{\varphi(x)} \Delta(y)\, dy \int_0^h dz$$

worin sich die auf z bezügliche Integration sogleich bewerkstelligen lässt; es bleibt dann

$$7) \qquad M = h \int_0^g dx \int_0^{\varphi(x)} \Delta(y)\, dy$$

Dieses Doppelintegral steht unter der Form des im vorigen Aufsatze behandelten Integrales Nr. 1. und daher folgt auf der Stelle

$$8) \qquad M = gh \int_0^{\varphi(g)} \Delta(y)\, dy - h \int_{\psi(o)}^{\varphi(g)} \Delta(y)\, \psi(y)\, dy$$

Auch hiervon kann man sich leicht eine Interpretation verschaffen, wenn man erst den einfachen Fall eines Parallelopipedes, wo $g = a$, $\varphi(x) = b$, $h = c$, betrachtet. Zufolge der Formel 7. wird nämlich die Masse des Parallelopipedes durch

$$c \int_0^a dx \int_0^b \Delta(y)\, dy = ac \int_0^b \Delta(y)\, dy$$

ausgedrückt, was unmittelbar auf das erste Integral in Nr. 8. passt; dabei kann a die Breite, c die Höhe und b die Tiefe des Parallelopipedes heissen. Aehnlich würde

$$ac \int_\beta^b \Delta(y)\, dy = ac \int_0^b \Delta(y)\, dy - ac \int_0^\beta \Delta(y)\, dy$$

die Differenz der Massen zweier Parallelopipede bezeichnen, welche die Tiefen b und β haben; diess ist nichts Anderes als die Masse eines Parallelopipedes mit der Tiefe $b - \beta$, dessen Ecke aber nicht in 0 fällt, sondern um β davon absteht. Geben wir nun der Formel 8. die Gestalt:

$$M = gh \int_{o}^{\varphi(g)} \Delta(y)\,dy - gh \int_{\varphi(o)}^{\varphi(g)} \frac{\Delta(y)\psi(y)}{g}\,dy$$

so können wir sie auf folgende Weise in Worte übertragen:

> Unter den hinsichtlich der Dichtigkeit gemachten Voraussetzungen ist die Masse des fraglichen Cylinders die Differenz zwischen den Massen zweier rechtwinkligen Parallelopipede, welche mit dem Cylinder gleiche Breite und Höhe besitzen. Das erste dieser Parallelopipede hat die Tiefe $\varphi(g)$ und in ihm herrscht dasselbe Gesetz der Dichtigkeitsänderung wie im Cylinder; das zweite Parallelopiped steht um $\varphi(o)$ von der Achse der x ab, hat die Tiefe $\varphi(g) - \varphi(o)$ und in ihm wird das Gesetz der Dichtigkeitsänderung durch $\frac{\Delta(y)\,\psi(y)}{g}$ ausgedrückt, wobei $\psi(y)$ die Umkehrung der Funktion $\varphi(x)$ bezeichnet.

Die Allgemeinheit dieses Theoremes erlaubt sehr zahlreiche Spezialisirungen desselben, je nachdem man der einen oder anderen von den willkührlichen Funktionen $\varphi(x)$ und $\Delta(y)$ eine besondere Form ertheilt. Nehmen wir z. B.

$$\varphi(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad g = a$$

so ist der Cylinder ein elliptischer mit den Halbachsen a und b Da aus

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \text{ folgt } x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$$

so ist der zweite Ausdruck für $\psi(y)$ zu substituiren und die Formel 9. giebt jetzt

$$M = ah \int_0^0 \Delta(y)\, dy - ak \int_b^0 \frac{\Delta(y)\sqrt{b^2 - y^2}}{b}$$

wobei das erste Integral verschwindet und im zweiten Integrale die Gränzen vertauscht werden müssen um das positive Vorzeichen zu erhalten. Die Formel

$$M = ah \int_0^b \Delta(y) \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}\, dy$$

welche den vierten Theil der ganzen über der aus a und b konstruirten Ellipse stehenden Cylindermasse angiebt, stellt zugleich auch die Masse eines rechtwinkligen Parallelopipedes dar, welches a, b und h zu Kanten hat und worin die Dichtigkeit nach dem Gesetze $\Delta(y) \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}$ veränderlich ist. Multiplizirt man die obige Gleichung mit 4, so giebt sie folgendes spezielle Theorem:

> Die Masse eines geraden elliptischen Cylinders mit den Halbachsen a, b und der Höhe h, in welchem die Dichtigkeit durch die Funktion $\Delta(y)$ bestimmt wird, ist der Masse des umschriebenen rechtwinkligen Parallelopipedes gleich, wenn sich in dem letzteren die Dichtigkeit nach dem Gesetze $\Delta(y) \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}$ ändert.

So wie hier die Funktion $\varphi(x)$ spezialisirt wurde, ohne die Allgemeinheit von $\Delta(y)$ zu stören, so könnte man auch umgekehrt für $\Delta(y)$ eine besondere Substitution machen und $\varphi(x)$ allgemein lassen; doch giebt diess weniger elegante Resultate.

Massenbestimmung der Rotationskörper.

Da wir durch den in Nr. 9. verzeichneten Ausdruck bereits die Form kennen, unter welcher die Masse enthalten ist, sobald man sich der Polarkoordinaten bedient, so handelt es sich zunächst um die Bestimmung der für den Fall eines Rotationskörpers eintretenden Integrationsgränzen. Denken wir uns (Fig. 6.), eine ebene Kurve, deren Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten $MT = F(x)$ heissen möge, werde um die Abscissenachse herumgedreht, so entsteht eine Rotationsfläche, welche von jeder auf OX senkrechten Ebene in einem Kreise QPT geschnitten wird. Für $OM = x$, $MN = y$, $NP = z$ ist

$$\overline{MT}^2 = \overline{MP}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{NP}^2$$

d. i.

$$[F(x))]^2 = y^2 + z^2$$

und wenn man sich die Gleichung nach x aufgelöst denkt, so erhält man ein Resultat von der Form

10) $$x = f(y^2 + z^2)$$

als die bekannte allgemeine Gleichung der Rotationsflächen, bezogen auf rechtwinklige Koordinaten. Substituiren wir für x, y, z die in Nr. 4. verzeichneten Werthe, so tritt an die Stelle der Gleichung 10. die Polargleichung der Rotationsfläche nämlich

$$\begin{aligned} r\cos\vartheta &= f(r^2 \sin^2\vartheta \cos^2\omega + r^2 \sin^2\vartheta \sin^2\omega) \\ &= f(r^2 \sin^2\vartheta) \end{aligned}$$

und mithin verschwindet ω völlig aus der Gleichung, was auch aus rein geometrischen Gründen leicht erhellt. In der Gleichung

$$r\cos\vartheta = f(r^2 \sin^2\vartheta) = f(r^2 - r^2\cos^2\vartheta)$$

lässt sich weiter r durch ϑ ausdrücken, so dass ein Resultat von der Form

$$r = \varphi(\cos\vartheta) \tag{11}$$

zum Vorschein kommt, welches wir als allgemeine Polargleichung der Rotationsflächen ansehen dürfen.

Wenn es nun darauf ankommt, die Masse des Rotationskörpers zu bestimmen, welche von der Rotationsfläche einerseits und von den positiven Theilen der Koordinatenebenen andererseits begränzt wird, so finden sich die für ϱ, ϑ, ω geltenden Integrationsgränzen sehr leicht durch die einfachen Bemerkungen, dass erst dem ϱ der Spielraum von $\varrho = 0$ bis $\varrho = r = \varphi(\cos\vartheta)$ freisteht, weil r der zu einem Punkte der Oberfläche gehörende Radiusvektor ist, und dass ferner für ϑ und ω die Gränzen 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ gelten müssen. Die Abhängigkeit, in welcher ϱ von ϑ steht, nöthigt uns hier, die auf ϱ bezügliche Integration zuerst vorzunehmen und es ist deshalb

$$M = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\omega \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{\varphi(\cos\vartheta)} \varrho^2 \varDelta(\varrho,\ \vartheta,\ \omega)\, d\varrho$$

Wir setzen nun weiter voraus, dass die Dichtigkeit nur von ϱ, nicht aber von ϑ und ω abhängig sei, so dass also die Dichtigkeit in allen von 0 gleichweit entfernten Punkten dieselbe ist. Man kann sich in diesem Falle den Rotationskörper aus einer Reihe unendlich dünner Kugelschaalen zusammengesetzt denken, wobei jede solche Schaale für sich homogen ist, während die Dichtigkeit von Schicht zu Schicht wechselt. Bezeichnen wir die in der Entfernung ϱ stattfindende Dichtigkeit einfach mit $\varDelta(\varrho)$ so ist jetzt

$$M = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\omega \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{\varphi(\cos\vartheta)} \varrho^2 \varDelta(\varrho)\, d\varrho$$

Hier ist der Umstand von Vortheil, dass ϱ, ϑ und $\varphi(\cos\vartheta)$ von ω unabhängig sind, man wird dadurch in die Möglichkeit gebracht,

die auf ω bezügliche Integration unmittelbar auszuführen; man erhält

$$12)\qquad M = \frac{1}{2}\pi \int_o^{\frac{1}{2}\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_o^{\varphi(\cos\vartheta)} \varrho^2 \varDelta(\varrho)\, d\varrho$$

Wenn wir eine neue Variable $t = \cos\vartheta$ einführen, so wird $\sin\vartheta\, d\vartheta = -dt$ und mithin unter Rücksicht darauf, dass den Gränzen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ die neuen Gränzen $t = 1$ und $t = 0$ entsprechen

$$M = -\frac{1}{2}\pi \int_1^o dt \int_o^{\varphi(t)} \varrho^2 \varDelta(\varrho)\, d\varrho = \frac{1}{2}\pi \int_o^1 dt \int_o^{\varphi(t)} \varrho^2 \varDelta(\varrho)\, d\varrho$$

Das mit $\frac{1}{2}\pi$ multiplizirte Doppelintegral steht unter der Form des in der vorigen Abhandlung betrachteten Integrales Nr. 1. und wird ihm völlig gleich, wenn man sich t, ϱ, $\varrho^2\varDelta(\varrho)$ an die Stelle des dortigen x, y, $f(y)$ gesetzt denkt. Zufolge der Formel 10. in IV. ist daher

$$13)\qquad M = \frac{1}{2}\pi \int_o^{\varphi(1)} \varrho^2 \varDelta(\varrho)\, d\varrho - \frac{1}{2}\pi \int_{\varphi(o)}^{\varphi(1)} \varrho^2 \varDelta(\varrho)\, \psi(\varrho)\, d\varrho$$

und damit das Problem auf blose Quadraturen zurückgeführt.

Handelte es sich um die Massenbestimmung eines Kugeloktanten mit dem Halbmesser r, so wäre die obere Integrationsgränze für ϱ in Nr. 12. konstant $= r$ und mithin die Masse der Kugel

$$\frac{1}{2}\pi \left[\int_o^{\frac{1}{2}\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta\right] \left[\int_o^r \varrho^2 \varDelta(\varrho)\, d\varrho\right] = \frac{1}{2}\pi \int_o^r \varrho^2 \varDelta(\varrho)\, d\varrho$$

Ebenso würde das Integral

$$\frac{1}{2}\pi\int_{r'}^{r}\varrho^2 \varDelta(\varrho)\,d\varrho$$

$$= \frac{1}{2}\int_{o}^{r}\varrho^2 \varDelta(\varrho)\,d\varrho - \frac{1}{2}\pi\int_{o}^{r'}\varrho^2 \varDelta(\varrho)\,d\varrho$$

die Differenz zwischen den Massen zweier konzentrischen Kugeloktanten, d. h. die Masse eines Kugelschaalenoktanten angeben, welcher r zum äusseren und r' zum inneren Halbmesser hat. Wenden wir diese Bemerkungen auf die Formel 13. an, so gelangen wir zu dem folgenden Theoreme:

> Wenn $r = \varphi(\cos\vartheta)$ die Polargleichung der Oberfläche eines Rotationskörpers bezeichnet, innerhalb dessen die Dichtigkeit in der Entfernung ϱ vom Anfangspunkte der Koordinaten durch $\varDelta(\varrho)$ bestimmt wird, so ist die Masse des zwischen den positiven Theilen der Koordinatenebenen liegenden Körperstückes gleich der Differenz unter den Massen eines Kugeloktanten und eines Kugelschaalenoktanten; die Kugel hat $\varphi(1)$ zum Halbmesser und in ihr ändert sich die Dichtigkeit gleichfalls nach dem Gesetze $\varDelta(\varrho)$, die Kugelschaale besitzt die Radien $\varphi(1)$ und $\varphi(0)$ und die Dichtigkeit in ihr wird durch die Funktion $\varDelta(\varrho)\psi(\varrho)$ bestimmt, wobei $t = \psi(\varrho)$ die Umkehrung der Funktion $\varrho = \varphi(t)$ bezeichnet.

Wir wollen die Formel 13. noch auf das für die physische Astronomie bedeutsame Beispiel des Rotationsellipsoides anwenden. Die Gleichung des dreiachsigen Ellipsoides ist bekanntlich

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

woraus für $c = b$ die Gleichung des Rotationsellipsoides folgt:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$$

in welcher a zugleich die Drehungsachse bezeichnet. Als Polargleichung des Ellipsoides ergiebt sich hieraus durch Substitution der unter Nr. 4. verzeichneten Werthe

$$r = \frac{ab}{\sqrt{a^2 sin^2 \vartheta + b^2 cos^2 \vartheta}}$$

d. i.

$$14) \quad r = \frac{ab}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) cos^2 \vartheta}} \text{ oder } r = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + (b^2 - a^2) cos^2 \vartheta}}$$

je nachdem a grösser oder kleiner ist; hiermit haben wir unmittelbar die Form der Funktion $\varphi(cos\,\vartheta)$. Aus $\varphi(t) = \varrho$, d. h.

$$\frac{ab}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) t^2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + (b^2 - a^2) t^2}} = \varrho$$

folgt nun umgekehrt

$$15) \quad t = \frac{a}{\varrho}\sqrt{\frac{\varrho^2 - b^2}{a^2 - b^2}} \text{ oder } t = \frac{a}{\varrho}\sqrt{\frac{b^2 - \varrho^2}{b^2 - a^2}}$$

je nachdem a grösser oder kleiner als b; hiermit ist die Form von $\psi(\varrho)$ bestimmt.

Vermöge der Substitutionen für $r = \varphi(cos\,\vartheta) = \varphi(t)$ und $t = \psi(\varrho)$ ergiebt sich jetzt aus der Formel 13., dass der Oktant eines gestreckten Rotationsellipsoides ($a > b$) durch

$$\frac{1}{2}\pi\int_0^a \varrho^2 \varDelta(\varrho)\,d\varrho - \frac{1}{2}\frac{\pi a}{\sqrt{a^2 - b^2}}\int_b^a \varrho \varDelta(\varrho)\sqrt{\varrho^2 - b^2}\,d\varrho$$

ausgedrückt wird, und wenn demnach E die Masse des ganzen Ellipsoides bezeichnet, so ist

$$E = 4\pi \int_o^a \varrho^2 \Delta(\varrho) d\varrho - \frac{4\pi a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \int_b^a \varrho \Delta(\varrho) \sqrt{\varrho^2 - b^2} d\varrho$$

oder wenn wir die numerische Excentricität des Ellipsoides mit ε bezeichnen, wo

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

16) $$E = 4\pi \int_o^a \varrho^2 \Delta(\varrho) d\varrho - \frac{4\pi}{\varepsilon} \int_b^a \varrho \Delta(\varrho) \sqrt{\varrho^2 - b^2}\, d\varrho$$

Hier ist das zweite Integral rechter Hand noch einer eleganten Transformation fähig; für

$$\varrho = \sqrt{b^2 + \varepsilon^2 \sigma^2} \text{ also } d\varrho = \frac{\varepsilon^2 \sigma d\sigma}{\sqrt{b^2 + \varepsilon^2 \sigma^2}}$$

entsprechen nämlich den Gränzen $\varrho = b$, $\varrho = a$ die neuen Gränzen $\sigma = 0$, $\sigma = a$ und so verwandelt sich das Integral in

$$4\pi \varepsilon^2 \int_o^a \sigma^2 \Delta(\sqrt{b^2 + \varepsilon^2 \sigma^2})\, d\sigma$$

Schreiben wir der Gleichförmigkeit wegen wieder ϱ statt σ und substituiren in Nr. 16., so wird

17) $$E = 4\pi \int_o^a \varrho^2 \Delta(\varrho) d\varrho - 4\pi \int_o^a \varrho^2 \varepsilon^2 \Delta(\sqrt{b^2 + \varepsilon^2 \varrho^2}) d\varrho$$

d. h. in Worte übertragen;

Die Masse eines aus den Halbachsen a und b konstruirten gestreckten Rotationsellipsoides ($a > b$) ist gleich der Differenz zwischen den Massen zweier Kugeln, welche beide mit der grossen Halbachse (Umdrehungsachse) beschrieben sind; für die erste Kugel ist wie bei dem

Ellipsoide in der Entfernung ϱ vom Mittelpunkte die Dichtigkeit gleich $\varDelta(\varrho)$, in der zweiten Kugel dagegen findet an derselben Stelle die Dichtigkeit $\varepsilon^2 \varDelta(\sqrt{b^2 + \varepsilon^2 \varrho^2})$ statt.

Für den Fall eines abgeplatteten Rotationsellipsoides, wo also $a < b$ ist, benutzen wir die zweiten Formen von $r = \varphi(t)$ und $t = \psi(\varrho)$ aus Nr. 14. und 15.; die Gleichung 13. giebt dann für das ganze Ellipsoid

$$E = 4\pi \int_o^a \varrho^2 \varDelta(\varrho)\, d\varrho + \frac{4\pi a}{\sqrt{b^2 - a^2}} \int_a^b \varrho \varDelta(\varrho) \sqrt{b^2 - \varrho^2}\, d\varrho$$

wobei wir das Vorzeichen des zweiten Integrales geändert haben, damit die grössere Integrationsgränze zugleich die obere werde. Um aber gleichförmig die grosse Achse mit a bezeichnen zu können, vertauschen wir a und b gegen einander und haben dann, unter Einführung der Bezeichnung

$$\eta = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$$

$$E = 4\pi \int_o^b \varrho^2 \varDelta(\varrho)\, d\varrho + \frac{4\pi}{\eta} \int_b^a \varrho \varDelta(\varrho) \sqrt{a^2 - \varrho^2}\, d\varrho$$

Mittelst der Substitution $\varrho = \sqrt{a^2 - \eta^2 \sigma^2}$ verwandelt sich das letzte Integral in

$$-\, 4\pi\mu^2 \int_b^o \sigma^2 \varDelta(\sqrt{a^2 - \eta^2 \sigma^2})\, d\sigma = 4\pi\eta^2 \int_o^b \sigma^2 \varDelta(\sqrt{a^2 - \eta^2 \sigma^2})\, d\sigma$$

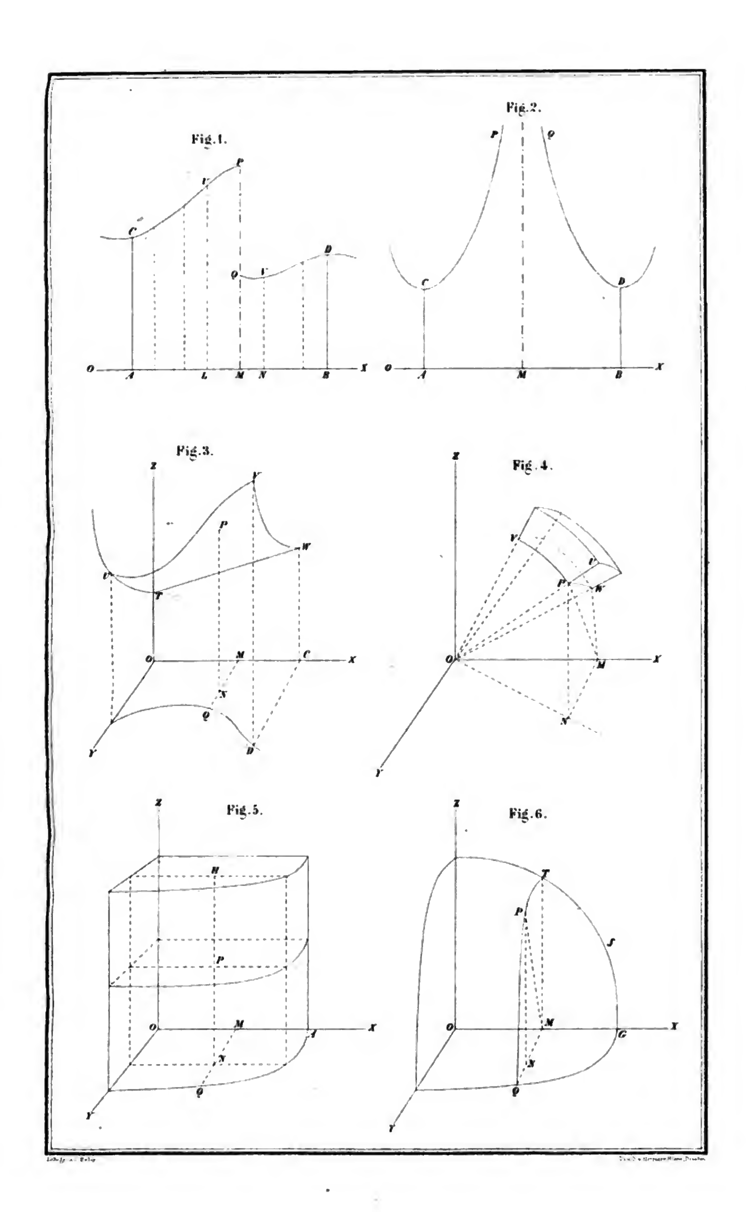
Schreiben wir wiederum ϱ für σ und substituiren, so wird

$$\textbf{18)} \qquad E = 4\pi \int_o^b \varrho^2 \varDelta(\varrho)\, d\varrho + 4\pi \int_o^b \varrho^2 \eta^2 \varDelta(\sqrt{a_2 - \eta^2 \varrho^2})\, d\varrho$$

d. h. in Worten ausgedrückt:

Die Masse eines aus den Halbachsen a und b konstruirten abgeplatteten Rotationsellipsoides ($a > b$) ist gleich der Summe von den Massen zweier Kugeln, welche beide mit der kleinen Halbachse (Umdrehungsachse) beschrieben sind; für die erste Kugel ist, wie bei dem Ellipsoide in der Entfernung ϱ vom Mittelpunkte die Dichtigkeit gleich $\varDelta(\varrho)$, in der zweiten Kugel findet an derselben Stelle die Dichtigkeit $\eta^2 \varDelta(\sqrt{a^2 - \eta^2 \varrho^2})$ statt.

Dieses Beispiel möge genügen, um die Leichtigkeit zu zeigen, mit welcher man aus dem allgemeinen Theoreme 13. beliebig viele spezielle Sätze, welche sich auf diese oder jene Form von Rotationskörpern beziehen, ableiten könnte.


Fig.1.
P
C
Q
D
O
A
L
M
N
B
X
Fig.2.
P
Q
C
D
O
A
M
B
X
Fig.3.
Z
V
P
W
U
T
O
M
C
X
N
Q
Y
D
Fig. 4.
Z
V
P
W
O
M
X
N
Y
Fig.5.
Z
H
P
O
M
A
X
N
Q
Y
Fig.6.
Z
T
P
S
O
M
G
X
N
Q
Y

Verbesserungen.

S. 6. Z. 12. v. u. statt *Conchy* lies *Cauchy*.

„ 15. „ 6. v. o. statt $OM - \frac{1}{2}\pi$ lies $OM = \frac{1}{2}\pi$.

„ 19. „ 8. v. u. statt tritt lies wird.

„ 27. „ 10. v. o. statt e_{ti} lies e^{ti}.

„ 52. „ 5. v. u. fehlt $=$ zwischen $\varphi(x)$ und x.

„ 55. „ 6. v. u. ist die 1 hinter $\varphi(x)$ zu streichen.

„ 57. „ 6. v. u. ebenso Z. 4. v. u. statt $\frac{\sqrt{-1}}{3}$ lies $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{3}}$

„ 59. „ 5. v. u. statt 1 . 2 . 2 lies 1 . 2 . 3.

„ 75. Formel 79. ist das letzte Glied $(x - a)^2$

„ 85. „ 1. v. o. statt kekannte lies bekannte.

„ 85. „ 6. v. u. statt $xF(x)$ lies $F(x)$

„ 107. „ 8. v. u. statt der lies den.

„ 108. „ 3. v. u. statt $\int_{\mu}^{\infty}$ lies $\int_{o}^{\infty}$

„ 120. „ 1. v. u. statt $e^{\mu} z^{-z}$ lies $z^{\mu} e^{-z}$.

„ 121. „ 7. und Z. 5. v. u. statt μ^n lies μ^m.

„ 126. „ 10. v. u. statt VI. lies V.

„ 132. „ 6. v. o statt $\sqrt{a^2 - y^2}$ lies $\sqrt{a^2 - b^2}$.

„ 140. Formel 8. statt $\psi(o)$ lies $\varphi(o)$.

In Fig. 3. gehört der Buchstabe L an den Durchschnitt der Linien OY und DQ.

Druck von E. H. R. Roempler in Dresden.




Digitized by Google